Esercizi n. 10

key words: Equazioni differenziali, soluzioni di equazioni differenziali, problema di Cauchy, soluzioni massimali, lemma di Gronwall, soluzioni definite su domini "tipo striscia".

1) Date le seguenti funzioni

$$f(t,y) := \frac{|y|^\alpha}{1+t^2} \qquad \alpha > 0$$

$$g(t,y) := \left(y_1 \log(t), \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right)$$

determinare se e dove sono localmente lipschitziane nelle variabili spaziali, uniformemente in t.

2) Riscrivi la seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$y''(t) + \alpha y(t) = f(t)$$

come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, $z'(t) = A(t)z(t) + B(t)$, con $A(t) \in M_{2,2}$ e $B(t) \in \mathbb{R}^2$ per ogni t.

3) Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione. Supponiamo per ipotesi che esista $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tale che $F^k = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k\ volte}$ sia una contrazione. Dimostrare che F ha un unico punto fisso.

4) Calcolare le iterate di Picard relative al problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = y + 3t^2 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e determinare la soluzione del problema per passaggio al limite.

5) Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 4tu + t, \\ u(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{u}{t} + t^2 e^t, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u-1}{\sqrt{t}}, \\ u(1) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{t+1}{t} u + t^2, \\ u(1) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = (u-1)\cos t, \\ u(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = u \tan t + \cos t, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

6) Si trovino (tutte) le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$u' = 1 - \frac{u}{t}, \qquad\qquad u' = 2tu + u^2,$$

$$u' = \frac{u+t}{u-t}, \qquad\qquad u' = \frac{u}{t} + \frac{u^2}{t^2},$$

$$u' = \frac{u}{t} + \frac{u^2}{t}, \qquad\qquad u' = u + t\sqrt[3]{u}.$$

7) Sia $f(x) = t^2 + pt + 1$, $p > 0$. Risolvere la seguente ODE con il metodo della separazione delle variabili:

$$u'(t) = t^{p-1} f(t^{-p} u(t))$$

8) Ricondurre $x'(t) = f(\frac{x}{t})$ ad un'equazione differenziale risolvibile con il metodo delle variabili separabili.

9) Dimostrare che e^{at} e e^{bt} sono linearmente indipendenti se $a \neq b$.

10) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Determinare tutte le soluzioni periodiche di $x'(t) = f(x(t))$.

11) Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) > 0$ e sia (a, b) la componente connessa dell'insieme $\{\xi \mid f(\xi) \neq 0\}$ a cui appartiene x_0. Supponiamo $a \neq -\infty$ e $b \neq +\infty$.
Supponiamo f localmente lipschitziana. Dimostrare che

$$\int_a^{x_0} \frac{1}{f(\xi)} d\xi = \int_{x_0}^{b} \frac{1}{f(\xi)} d\xi = +\infty$$