

ESEMPIO

Successione di Fibonacci:

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 0 + 1 = 1 \quad F_3 = 1 + 1 = 2 \quad F_4 = 1 + 2 = 3$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad (\text{definizione per induzione})$$

$$\begin{vmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_0 \\ F_1 \end{vmatrix}$$

Vorremmo una formula in grado di darci direttamente F_n in funzione di n , senza la necessità di conoscere alcun F_m con $m < n$. Un primo passo è:

Quindi

$$\begin{vmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{n-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

(tutti i prodotti sono
righe per colonne)

dove

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^5 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \quad \dots$$

Non si vede uno schema chiaro, che permetta di indovinare cosa provare per induzione. Peggio: le entate cerchiato in rosso sono esattamente i numeri che dovremmo trovare. Non è la via giusta.

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ è m. simmetrica $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile

$$A - \lambda I_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

le cui radici sono

$$\phi_+ := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi_- := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \phi_+)(\lambda - \phi_-) \quad \phi_+ \neq \phi_-$$

serviranno che dai due modi diversi di scrivere $\mu_a(\lambda)$ segue

$$\phi_+ \phi_- = -1 \quad \phi_+ + \phi_- = 1$$

Cerchiamo gli autospazi:

$$\boxed{\lambda = \phi_+} \quad A - \phi_+ I_2 = \begin{vmatrix} -\phi_+ & 1 \\ 1 & 1 - \phi_+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\phi_+ & 1 \\ 1 & \phi_- \end{vmatrix} \quad (\text{il determ. è } 0)$$

Quindi: $E_{\phi_+} = \text{span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ \phi_+ \end{vmatrix} \right)$

$\boxed{\lambda = \phi_-}$ si vede in modo analogo che $E_{\phi_-} = \text{span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ \phi_- \end{vmatrix} \right)$

Allora

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi_+ & \phi_- \end{vmatrix}$$

calcoliamo P^{-1} :

Stasera
l'errore perché
ho controllato!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \phi_+ & \phi_- & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \phi_- - \phi_+ & -\phi_+ & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \phi_- - \phi_+ = -\sqrt{5}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

$$1 - \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \phi_+}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \phi_-$$

$$\begin{vmatrix} I_2 & -\frac{\phi_-}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ & \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{\phi_-}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

Infine

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\phi_-}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi_+ & \phi_- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\phi_+^2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\phi_-^2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = D$$

$$D = \begin{vmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{vmatrix}$$

(ho controllato anche quest)

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = P \underbrace{D P^{-1} P D P^{-1}}_{I_2} = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = PD^3P^{-1} \dots$$

È qualche vantaggio nell'essere passati dalle potenze di A alle potenze di D ? SÌ!

EVE

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & d_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & & \\ & \delta_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

Verificare che

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} \delta_{11} & & \\ & d_{22} \delta_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & d_{nn} \delta_{nn} \end{vmatrix} = D_2 D_1$$

Ritornando a Fibonacci:

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$PD^{n-1}P^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi_+ & \phi_- \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_+^{n-1} & 0 \\ 0 & \phi_-^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{\phi_-}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_+^{n-1} & \phi_-^{n-1} \\ \phi_+^{n-1} & \phi_-^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{\phi_-}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi_+}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\phi_+^{n-1}\phi_-}{\sqrt{5}} + \frac{\phi_-^{n-1}\phi_+}{\sqrt{5}} & \frac{\phi_+^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\phi_-^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\phi_+^{n-1}\phi_-}{\sqrt{5}} + \frac{\phi_-^{n-1}\phi_+}{\sqrt{5}} & \frac{\phi_+^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\phi_-^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$$

è l'unica entrata di $PD^{n-1}P^{-1}$ che è effettivamente necessario calcolare

Bertando

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^{n-1} - \phi_-^{n-1})$$

Consiglio: quando si calcola un polinomio caratteristico conviene vedere se ci siano spunti che permettano di averlo subito in forma fattorizzata. Questo semplifica la vita per la ricerca di autovalori.

ESEMPIO

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$A - \lambda I_4 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} - \lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_4) = - \det \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 5 & 2 \\ -\lambda & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} - \lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} = - \det \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 5 & 2 \\ 0 & -1 - \lambda^2 & 3 + 5\lambda & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & \sqrt{2} - \lambda & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 + 1) \cdot \det \begin{vmatrix} \sqrt{2} - \lambda & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} = (2 - 2\sqrt{2}\lambda + \lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 1) =$$

$$= (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 4)$$

$\lambda^2 + 1 = 0$ non ha radici reali.

$\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 4 = 0$ $\Delta = 8 - 16 = -8 < 0$ nemmeno questa ha radici reali.

Se dovessimo, invece, risolvere l'equazione

$$p_\lambda(\lambda) = \lambda^4 - 2\sqrt{2}\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 4 = 0 \quad \dots\dots$$

Osserviamo che

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} \sqrt{2} - \lambda & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{vmatrix}$$

Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 20 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 18 - 18 - 20 = 42$$

Altro modo: voglio vedere se è possibile trasformare A usando solo matrici elementari del tipo $E_{ij, \lambda}$ in una matrice del tipo

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 42 \end{vmatrix}$$

Per il G. L. Binet è chiaro che

$$\det(A) = \det(A') = 42 \quad \text{SPICE}$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 0 & -3 & -31 \\ 0 & 0 & -14 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & -14 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} R_3 \longrightarrow R_3 - R_1 \\ R_1 \longrightarrow R_1 - 2R_3 \\ R_2 \longrightarrow R_2 - R_3 \end{array} \quad R_n \longrightarrow R_1 + R_3$$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 3 & 31 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 31 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 18 - \frac{62}{3} \\ 0 & 3 & 31 \end{vmatrix} = -\frac{11}{3}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1 \quad R_2 \longrightarrow R_2 + R_3 \quad R_2 \longrightarrow R_2 - \frac{2}{3}R_3 \quad R_3 \longrightarrow R_3 - 3R_1$$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 42 \end{vmatrix}$$

(volendo possiamo eliminare ancora quest. Non è strettamente necessario.)

(quasi!)

È un lavoro un po' complicato, ma si può sempre fare. A che cosa può servire? Consideriamo una matrice

$$1 = 3 + x3 \quad 1 = 3(x+1) \quad x+1 = \frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$n \times m$ del tipo a blocchi

$$A = \begin{vmatrix} B & * \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

B $r \times r$

C $(n-r) \times (n-r)$

A, B, C son tutte m. quadrate.

Posso fare operazioni elementari esclusivamente del tipo $E_{i,j,a}$ $a \in \mathbb{R}$ sulle prime r righe di A

Poichè $\det(E_{i,j,a}) = 1$, queste non cambiano $\det(A)$

Con queste operazioni trasformo B in una matrice del tipo

qui i tutti 0

$$\begin{vmatrix} 1 & * & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & * \\ & & & \ddots \\ & & & & \det(B) \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{vmatrix} 1 & * & & * \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & * \\ & & & \ddots \\ & & & & \det(B) \\ & & & & & C \end{vmatrix} = 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \det(B) \det(C) = \det(B) \cdot \det(C)$$

Il metodo di pagina precedente non funziona solo se una delle prime r colonne di A è tutta nulla. Questo anche se ci si trova in tale situazione durante la trasformazione da A in A' .

Ma in tal caso la stessa situazione si verifica per B . Tale situazione comporta poi che

$\det(A) = 0 = \det(B)$. Quindi la formula sopra è ancora valida.