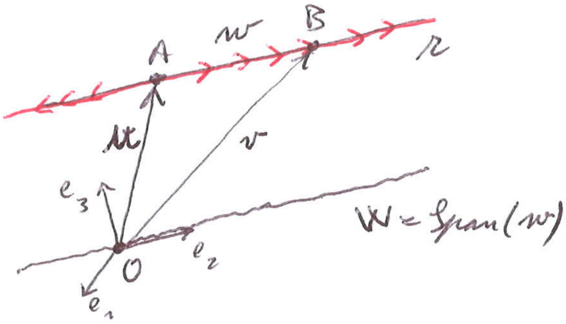
GEOMETRIA AFFINE

L'ambiente in cui operiamo è $\mathbb{R}^3$, lo spazio. Molto di quanto diremo vale anche in $\mathbb{R}^2$ (il piano).

RETTE

Abbiamo un'idea intuitiva di "cosa sia" una retta. Per esempio, "sappiamo" che per due punti distinti (del piano sicuramente, ma anche) dello spazio passa una ed una sola retta. Come "descrivere" i punti di tale retta?



Il punto A viene identificato col vettore $u=\vec{OA}$, e B con il vettore $v=\vec{OB}$. Quindi $v-u=w=\vec{AB}$

$(u+(v-u)=v \ldots)$

Allora è abbastanza ragionevole concludere che i punti della retta r per A e B formano l'insieme

$$r=\{u+\lambda w \mid \lambda\in\mathbb{R}\} = \underbrace{u+W} \qquad W=\mathrm{Span}(w)$$

$u+W=\{u+w \mid w\in W\}$ è solo un modo di scrivere.

$W\subset\mathbb{R}^3$ sottospazio vettoriale, $\dim(W)=1$

W è detto la DIREZIONE della retta r. { W è univocamente determinata da r.

Osserviamo che $r=B+W$ spiegare. Più in generale, se $C\in r$ è un punto qualsiasi, allora $r=C+W$

Verifichiamolo:

sia $C=u+w_0$ per un certo $w_0\in W$. Allora, per ogni $w\in W$ si ha:

$$C+w=(u+w_0)+w=u+\overbrace{(w_0+w)}^{\in W}\in u+W=r$$

Dunque $C+W\subset r$.

Viceversa, sia $D\in r$ arbitrario. Allora $D=u+w$ per un opportuno $w\in W$. Quindi

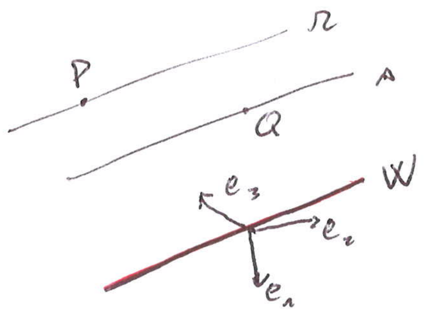
$$D=u+w \overset{\text{trucchetto}}{=} u+w_0+w-w_0 = (u+w_0)+\overbrace{w-w_0}^{\in W} = C+\overbrace{(w-w_0)}^{\in W}$$

Dunque $D \in C + W$, e dall'arbitrarietà di D in r segue $r \subset C + W$.

Osserviamo che, se $W \subset \mathbb{R}^3$ è un sottosp. vett. con $\dim(W) = 1$, e se $P \in \mathbb{R}^3$ è un punto fissato arbitrariamente, allora esiste ed è unica una retta passante per P ed avente direzione W: $r \overset{def}{=} P + W$

$P \in r$ perché $P = P + O_V$, dato che $O_V \in W$.

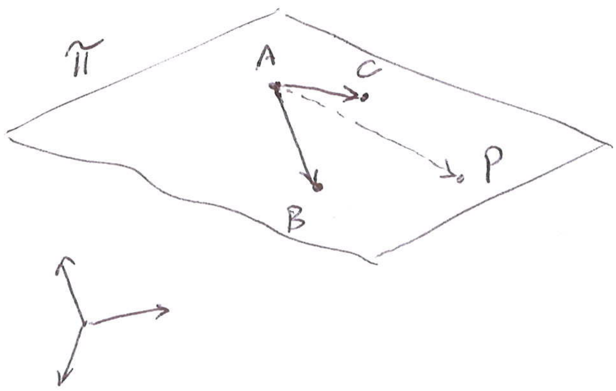
Che cosa hanno in comune due rette parallele?
La direzione!



Quindi $r // s \Leftrightarrow r = P + W$, $s = Q + W$
dove $P \in r$ arbitrario e
$Q \in s$ —— " ——

PIANI

"Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano."



$A, B, C \in \pi$ non allineati
"n.a." $\Longleftrightarrow$ $\vec{AB}, \vec{AC}$ lin. indip.

[è l'analogo di quel che succede per le rette:
A, B "distinti" $\Longleftrightarrow$ $\vec{AB} \neq O_V$, cioè
$A \neq B$ $\qquad$ $\vec{AB}$ lin. indip.]

Se $P \in \pi$ è qualsiasi, allora è abbastanza intuitivo che $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}$ siano linearmente dipendenti, quindi
$\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ opportuni.
Formalizziamo quest'intuizione. Sia $W \overset{def}{=} \mathrm{Span}(\vec{AB}, \vec{AC})$
$W \subset \mathbb{R}^3$ è sottospazio vettoriale, $\dim(W) = 2$.

Allora definiamo il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per A, B, C non allineati come $\pi = \underbrace{A+W}_{\text{è solo notazione}} = \{A+w \mid w \in W\}$

(naturalmente, come nel caso della retta, identifichiamo il punto A col vettore u ...)

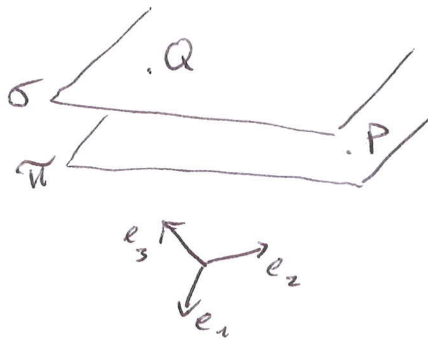
Il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ è detto la GIACITURA del piano π. W è univocamente determinato da π.

Come si vede, rette e piani sono definiti SPIEG. in modo molto simile, cambia solo la dimensione di W. Anche le loro proprietà sono, pertanto, molto simili:

- Se D è un qualsiasi punto di π, si ha $\pi = D + W$

  Questo si può dimostrare in modo perfettamente analogo a quanto fatto sopra per la retta r. Infatti, in tale ragionamento non entrava mai in gioco il fatto $\dim(W) = 1$.

- Due piani π, σ sono paralleli $\iff$ hanno la stessa giacitura



$\pi = P + W$ $\quad\sigma = Q + W$

con $P \in \pi$ arbitr. e $Q \in \sigma$ arbitrario

Possiamo "generalizzare" la nozione di parallelismo definendo il parallelismo tra una retta $r = P + W_1$ ed un piano $\pi = Q + W_2$, W_1, W_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, con $\dim(W_1) = 1$ e $\dim(W_2) = 2$. Allora

$r \cap \pi = \emptyset$

$\Rightarrow$ $W_1 \subset W_2$

è più comodo prendere questa condizione come def del parallelismo tra r e π. Si osservi che

$r \cap \pi \neq \emptyset \Rightarrow r \subset \pi$. La def con i W permette anche $r \parallel r$ e $\pi \parallel \pi$

EQUAZIONI

• E. PARAMETRICHE per una RETTA

$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vettore/punto arbitrario

La retta $r \subset \mathbb{R}^3$ sia individuata dal suo punto $A = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ e dalla sua direzione $W = \operatorname{Span}(w)$, dove $w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Se $t \in \mathbb{R}$ è arbitrario (t è il "parametro"), allora

$$\underbrace{A + tw = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + tw_1 \\ a_2 + tw_2 \\ a_3 + tw_3 \end{vmatrix}}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$ si trovano così tutti i punti di $A + W = r$

$$\begin{cases} x = a_1 + t w_1 \\ y = a_2 + t w_2 \\ z = a_3 + t w_3 \end{cases}$$

equazioni parametriche di r (è un modo tradizionale di scriverle)

Tali equazioni non sono uniche.
Infatti, il punto A può essere scelto arbitrariamente su r, ed anche il vettore w può essere sostituito da un qualsiasi λw, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$.

Abbiamo detto che $w \neq 0_V$, cioè qualcuno dei w_i deve essere $\neq 0$. Ad esempio, sia $w_2 \neq 0$. Allora

$$y = a_2 + t w_2 \Rightarrow t = \frac{y - a_2}{w_2}$$

Sostituendo il "t" così trovato nelle altre due equazioni troviamo

SPIEGARE!

$$\begin{cases} x - \dfrac{w_1}{w_2} y = a_1 - \dfrac{w_1}{w_2} a_2 \\ \\ z - \dfrac{w_3}{w_2} y = a_3 - \dfrac{w_3}{w_2} a_2 \end{cases}$$

equazioni cartesiane per r

Da come le abbiamo trovate non è chiaro il loro significato geometrico.

Rivedremo meglio in seguito

Non sono uniche.

- EQUAZIONI PARAMETRICHE PER UN PIANO

Il piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ sia individuato da un suo punto $A = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \end{vmatrix}$ e dalla giacitura $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ dove

$$w_1 = \begin{vmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \end{vmatrix} \quad w_2 = \begin{vmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ w_{32} \end{vmatrix}$$ sono lin. indip. $\iff \mathrm{rg}\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{vmatrix} = 2$

$s, t \in \mathbb{R}$ arbitrari (i "parametri"). Allora

$$\underbrace{A + s w_1 + t w_2 = \begin{vmatrix} a_1 + s w_{11} + t w_{12} \\ a_2 + s w_{21} + t w_{22} \\ a_3 + s w_{31} + t w_{32} \end{vmatrix}} \qquad \begin{cases} x = a_1 + s w_{11} + t w_{12} \\ y = a_2 + s w_{21} + t w_{22} \\ z = a_3 + s w_{31} + t w_{32} \end{cases}$$

al variare in tutti i modi possibili di s e t in $\mathbb{R}$, si trovano tutti i punti di $A + W = \pi$

↑ equazioni parametriche del piano π

↑ NON sono uniche

Anche per il piano π si può cercare di trovare equazioni cartesiane. Negli esempi questo è facilissimo:

ESEMPIO

π sia il piano per $A = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ con giacitura W generata da $w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ e $w_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$. Troviamo prima equazioni param. per π

$$\begin{cases} x = 1 + s & \Rightarrow s = x - 1 \\ y = 2 + s + 2t & \\ z = 2 + 3s + t & \Rightarrow t = z - 2 - 3s = z - 2 - 3x + 3 = z - 3x + 1 \end{cases}$$

sostituiamo s, t così trovati nella rimanente equazione

$$y = 2 + s + 2t = 2 + \underline{x} - 1 + z \underline{- 3x} + 1 \Rightarrow \boxed{2x + y - z = 3}$$ equazione cartesiana di π.

Nemmeno questa è unica: scriviamola nella forma

$2x + y - z - 3 = 0$ Sia $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ arbitrario. Consider.

$\lambda(2x + y - z - 3) = 0 \qquad 2\lambda x + \lambda y - \lambda z - 3\lambda = 0$

Allora è chiaro che

$\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ verifica $2x+y-z=3 \iff \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ verifica $\lambda(2x+y-z-3)=0$
cioè $2\lambda x + \ldots$

Dunque anche $2\lambda x+\lambda y-\lambda z=3\lambda$ è un' eq. cartesiana per π.

Si può sempre passare dalle eq. param. di un piano arbitrario $\pi \subset \mathbb{R}^3$ ad una sua equazione cartesiana.
Ma è meglio ragionare in un altro modo (che ci permette anche di sfruttare quanto abbiamo già studiato!).

Consideriamo un sistema lineare nelle indeterminate x, y, z, formato da una sola equazione:

(1) $\boxed{ax+by+cz=d}$ supponiamo (*) $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Chi è l'insieme delle sue soluzioni? Chiamiamolo S.
Per (*) possiamo supporre che uno almeno dei tre numeri reali a, b, c è $\neq 0$. Sia $a\neq 0$ per fissare le idee. Allora mi posso costruire "a mano" una soluzione di (1), ad esempio

$\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ rappresenta un punto $P_0 \in S$

La teoria ci dice poi che i punti di S (= le soluzioni di (1)) sono tutti e soli quelli ottenuti sommando a P_0 una soluzione del sistema lineare omogeneo

(2) $ax+by+cz=0$

associato ad (1).
Chi sono le soluzioni di (2)?
Sempre dalla teoria sappiamo che l'insieme di tutte le

soluzioni di (2) forma un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, chiamiamolo W (ma vale!...)

16/11/16

$\dim(W) = ?$

$$\dim(W) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(\# indeterminate}}}{3} - rg(|a \ b \ c|) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} 3 - 1 = \underline{2}$$

In conclusione: $S = P_0 + W$ dove $W \subset \mathbb{R}^3$ è sottosp. vettoriale di dimensione $= 2$.

S è un piano.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

S non è, in generale un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
In tal caso si avrebbe, infatti $0_{\mathbb{R}^3} \in S$ da cui $d = 0$.
Dunque, se $d \neq 0$ S non è s. sp. vett.
Anche una retta $r \subset \mathbb{R}^3$ non è in generale un sotto-spazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, per motivi analoghi.

Viceversa, voglio verificare che per ogni piano $P + W = \pi$ $W \subset \mathbb{R}^3$ s. sp. vett con $\dim(W) = 2$ posso "costruire" un'equazione cartesiana del tipo (1).

Cerco, innanzitutto, un S.L. omogeneo $ax + by + cz = 0$ (2) il cui insieme delle soluzioni sia W

$\dim(W) = 2 \Rightarrow (a, b, c) \neq (0,0,0)$, altrimenti --- SPIEG.

Se $W = Span(w_1, w_2)$, dove $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ sono come sopra allora le coordinate di w_1 devono verificare la relazione

$$(3) \quad \begin{cases} a w_{11} + b w_{21} + c w_{31} = 0 \\ a w_{12} + b w_{22} + c w_{32} = 0 \end{cases}$$

analogam. deve essere

vedo questo come un S.L. omogeneo nelle incognite a, b, c. La sua matrice dei coeff. è $\begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \end{vmatrix}$ che ha rango 2 essendo w_1, w_2 lin. indipendenti. Allora

$$\Bigg(\underbrace{\begin{vmatrix} w_{21} & w_{31} \\ w_{22} & w_{32} \end{vmatrix}}_{\alpha}, \underbrace{-\begin{vmatrix} w_{11} & w_{31} \\ w_{12} & w_{32} \end{vmatrix}}_{\beta}, \underbrace{\begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{vmatrix}}_{\gamma} \Bigg) \neq (0,0,0)$$

Inoltre

$$w_{11}\begin{vmatrix} w_{21} & w_{31} \\ w_{22} & w_{32} \end{vmatrix} - w_{21}\begin{vmatrix} w_{11} & w_{31} \\ w_{12} & w_{32} \end{vmatrix} + w_{31}\begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{vmatrix} =$$

è lo sviluppo del seguente det, secondo gli elementi della prima riga

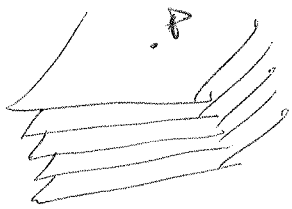
$$= \det \begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Dunque (α, β, γ) è soluzione della prima delle eq. di (3).
Analogamente si vede che (α, β, γ) è soluzione della seconda riga di (3).
Pertanto, a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, ho che $(a, b, c) = (\alpha, \beta, \gamma)$

Considero, infine l'equazione lineare

(4) $\alpha x + \beta y + \gamma z = d$ dove (α, β, γ) sono quelli che ho trovato.

d è ancora da determinare.



Abbiamo visto che, per ogni fissato d la (4) rappresenta un piano, e tutti questi piani hanno la stessa giacitura W, quella di π. Ce ne sarà uno che passa per P?

Se $P = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ P verifica (4) $\iff$ $\boxed{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = d}$ ma questa mi dà il "giusto" valore di d.