AMMORTAMENTI A RATE POSTICIPATE

Ci mettiamo nell'ipotesi che l'operazione sia regolata secondo la legge della capitalizzazione composta con **tasso di interesse periodale** i <u>coerente con la periodicità di pagamento delle rate</u>.

$+S$	$-R_1$	$\dots$	$-R_{m-1}$	$-R_m$
0	1	$\dots$	m-1	m

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \dots, -R_m\}/\{0, 1, 2, \dots, m\}$$

con $\quad R_k = C_k + I_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad$ **rate d'ammortamento**

$C_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

$I_k \quad$ **quota interesse** maturata in $[k-1, k]$ e pagata in k, $k = 1, 2, \dots, m$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

Restituzione del capitale in unica soluzione e pagamento periodico degli interessi posticipati

Consideriamo il caso:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{m-1} = 0 \qquad\qquad C_m = S$$

in cui si ha la restituzione del capitale in unica soluzione, a scadenza.

Si ha

$$I_k = i \cdot S \;\; , \; k = 1, \ldots, m; \qquad \text{quindi} \qquad R_k = i \cdot S \;\; , \;\; k = 1, \ldots, m-1; \quad R_m = i \cdot S + S$$

L'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S, -i \cdot S, -i \cdot S, \ldots, -i \cdot S - S\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

è equa.

Osservazione: interpretazione finanziaria per la formula

$$a_{\overline{m|}\, i} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - i \cdot a_{\overline{m|}\, i} - (1+i)^{-m} = 0$$

Può essere interpretata come condizione di equità per l'operazione finanziaria

$$\{1, -i, -i, \ldots, -i-1\} / \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k=1,\dots,m-1$.

Qual è la somma D_k da pagare in k per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S,-i\cdot S,-i\cdot S,\dots,-i\cdot S,-i\cdot S-D_k\}/\{0,1,2,\dots,k-1,k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k,\boldsymbol{y})=0 \quad\Leftrightarrow\quad S(1+i)^k-(i\cdot S)\,s_{\overline{k|}\,i}-D_k=0 \quad\Leftrightarrow\quad D_k=S$$

Si noti che $D_k=M(k,\boldsymbol{x})$.

Si definisce D_k **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k , $k=1,\dots,m$

$$D_k=S \qquad\qquad k=1,\dots,m-1$$

$$D_0=S\,,\quad D_m=0$$

Si ha allora che la quota interesse pagata in k

$$I_k=i\cdot S \qquad\qquad\qquad k=1,\dots,m$$

matura nell'intervallo $[k-1,k]$ sul debito residuo D_{k-1} , cioè $I_k=i\cdot D_{k-1}$

Osservazione

Consideriamo invece il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in t con $k < t < k+1$. Qual è la somma D_t da pagare in t per chiudere l'operazione, mantenendo la condizione di equità?

Sia

$$\boldsymbol{y} / \boldsymbol{s} = \{S, -i \cdot S, -i \cdot S, \ldots, -i \cdot S, -D_t\} / \{0, 1, 2, \ldots, k, t\}$$

l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(t, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^t - (i \cdot S)\, s_{\overline{k|}\, i} (1+i)^{t-k} - D_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_t = M(t, \boldsymbol{x})$$

Quindi il debito residuo coincide con il montante.

Si noti che

$$D_t = M(t, \boldsymbol{x}) = M(k, \boldsymbol{x})(1+i)^{t-k} = S(1+i)^{t-k}.$$

Ammortamento progressivo a rate posticipate

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \dots, -R_m\} / \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

con $R_k = C_k + I_k \quad k = 1, 2, \dots, m$ **rate d'ammortamento**

$C_k \quad k = 1, 2, \dots, m$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

I_k **quota interesse** maturata in $[k-1, k]$ e pagata in k, $k = 1, 2, \dots, m$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

Si definisce D_k **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k, $k = 1, \dots, m$

$$D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k = 1, \dots, m-1$$

$$D_0 = S, \quad D_m = 0$$

La quota interessi I_k matura nell'intervallo $[k-1, k]$ sul debito residuo D_{k-1}

$$I_k = i\, D_{k-1} \qquad k = 1, \dots, m$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k=1,\dots,m-1$. Qual è la somma X da pagare in k, dopo aver pagato la rata R_k, per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S,-R_1,-R_2,\dots,-R_k-X\}/\{0,1,2,\dots,k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k,\boldsymbol{y})=0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^k-R_1(1+i)^{k-1}-R_2(1+i)^{k-2}-\dots-R_k-X=0$$

$$\Leftrightarrow \quad X=M(k,\boldsymbol{x})$$

Quindi il montante è la somma da pagare per estinguere anticipatamente il prestito.

Osservazione

Se consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in t con $k<t<k+1$, il montante è ancora la somma da pagare in t per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità. Infatti, l'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S,-R_1,-R_2,\dots,-R_k,-M(t,\boldsymbol{x})\}/\{0,1,2,\dots,k,t\}$$

è equa.

Proviamo che il debito residuo

$$D_k = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

coincide con il montante

$$M(k, \boldsymbol{x}) = S(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

È inoltre

$$M(0, \boldsymbol{x}) = S = D_0$$

<u>Lemma</u>: relazione ricorrente per il montante

Si ha

$$M(k+1, \boldsymbol{x}) = M(k, \boldsymbol{x})(1+i) - R_{k+1}$$

Proviamo che

$$M(k, \boldsymbol{x}) = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k = D_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

Si dimostra per induzione.

Base: $M(0,\boldsymbol{x}) = S = D_0$

Passo induttivo:

se $M(k,\boldsymbol{x}) = S - C_1 - \ldots - C_k = D_k$ allora $M(k+1,\boldsymbol{x}) = S - C_1 - \ldots - C_k - C_{k+1} = D_{k+1}$

Dalla relazione ricorrente per il montante, e sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha

$$M(k+1,\boldsymbol{x}) = M(k,\boldsymbol{x})(1+i) - R_{k+1} = D_k(1+i) - C_{k+1} - I_{k+1} = D_k - C_{k+1}$$

Poiché

$$D_k = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k$$

si ha

$$M(k+1,\boldsymbol{x}) = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_k - C_{k+1} = D_{k+1}$$

È così provato il passo induttivo.

Riassumendo,

$$I_k = i\,D_{k-1} \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

con

$$D_{k-1} = S - C_1 - C_2 - \ldots - C_{k-1}\ , \quad k = 2, \ldots, m \qquad \text{e} \qquad D_0 = S$$

Inoltre

$$D_k = M(k, \boldsymbol{x}) \qquad\qquad k = 0, \ldots, m$$

Poiché

$$W(k, \boldsymbol{x}) = M(k, \boldsymbol{x}) + V(k, \boldsymbol{x}) \qquad \text{e} \qquad W(k, \boldsymbol{x}) = 0$$

si ha

$$D_k = M(k, \boldsymbol{x}) = -V(k, \boldsymbol{x}) \qquad\qquad k = 0, \ldots, m$$

essendo

$$V(k, \boldsymbol{x}) = -R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \ldots - R_m(1+i)^{-(m-k)}$$

Osservazione: $V(k, \boldsymbol{x})$ rappresenta il bilancio finanziario in k dell'operazione finanziaria $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$; in particolare, tale bilancio finanziario può essere valutato ad un tasso i' diverso dal tasso i per il quale l'operazione finanziaria è equa.

Verifica della condizione di equità

Siano

$C_k \quad k=1,2,\dots,m$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

$I_k \quad k=1,2,\dots,m$ **quote interesse** con $I_k = i\,D_{k-1}$

essendo

$$D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k=1,\dots,m-1$$

$$D_0 = S\,, \quad D_m = 0$$

il **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k , $k=1,\dots,m$

Risultano così assegnate le **rate d'ammortamento**

$$R_k = C_k + I_k \qquad k=1,2,\dots,m$$

Proviamo che l'operazione

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S, -R_1, -R_2, \dots, -R_m\}/\{0,1,2,\dots,m\}$$

soddisfa la condizione di equità: $W(0,\boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$

Dalla relazione ricorrente per il montante

$$M(k,\boldsymbol{x}) = M(k-1,\boldsymbol{x})(1+i) - R_k$$

si ha

$$R_k = M(k-1,\boldsymbol{x})(1+i) - M(k,\boldsymbol{x}) = D_{k-1}(1+i) - D_k$$

quindi

$$R_k(1+i)^{-k} = D_{k-1}(1+i)^{-(k-1)} - D_k(1+i)^{-k}$$

Sommando si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m} R_k(1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{m} D_{k-1}(1+i)^{-(k-1)} - \sum_{k=1}^{m} D_k(1+i)^{-k} = D_0 - D_m(1+i)^{-m} = D_0 = S$$

È così provata la condizione di equità.

Piano d'ammortamento

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0				$D_0 = S$
1	R_1	C_1	I_1	$D_1 = D_0 - C_1$
2	R_2	C_2	I_2	$D_2 = D_1 - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	R_m	C_m	I_m	$D_m = 0$
		S		

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue posticipate e quote capitali pari rispettivamente a 5.000, 10.000, 20.000 e 15.000 euro.