

Capitolo 6

■ Esercizi

1. Il menu della caffetteria di Giovanni propone un assortimento di bevande calde, pasticcini e panini. Il prodotto marginale di un lavoratore in più può essere definito come il numero dei clienti che possono essere serviti da tale lavoratore in un dato tempo. Giovanni ha un solo cameriere, ma sta valutando se assumerne un secondo e un terzo. Spiegate perché il prodotto marginale del secondo e del terzo lavoratore potrebbe essere superiore a quello del primo. Perché ci si può aspettare che il prodotto marginale del lavoro diminuisca oltre un certo punto?

Il prodotto marginale potrebbe crescere per il secondo e per il terzo lavoratore perché ognuno di essi potrebbe specializzarsi in un compito differente. Quando lavora una sola persona, essa dovrà raccogliere gli ordini, preparare i pasti, servirli e fare le pulizie. Quando invece i lavoratori sono due o tre, uno di essi può prendere gli ordini e servire i pasti mentre gli altri si occupano della preparazione di cibo e caffè e delle pulizie. Oltre un certo punto, tuttavia, se vengono assunti altri lavoratori il prodotto marginale diminuisce, perché dietro il bancone e in cucina lavorano troppe persone, le quali tentano di servire un numero crescente di clienti avendo a disposizione una quantità limitata di attrezzature e di spazio.

2. Considerate la situazione di breve periodo di un fabbricante di sedie, che dispone di determinati impianti e attrezzature. Il fabbricante ha osservato i seguenti livelli di produzione, ognuno corrispondente a un diverso numero di lavoratori:

Numero di lavoratori	Numero di sedie
1	10
2	18
3	24
4	28
5	30
6	28
7	25

a. Calcolate il prodotto marginale e il prodotto medio del lavoro per questa funzione di produzione

Il prodotto medio del lavoro, PM_L , è uguale a $\frac{q}{L}$. Il prodotto marginale del lavoro, P'_L , è uguale a $\frac{\Delta q}{\Delta L}$, la variazione della produzione in rapporto alla variazione della quantità di lavoro. Per questo processo di produzione abbiamo:

L	q	PM_L	P'_L
0	0	—	—
1	10	10	10
2	18	9	8
3	24	8	6
4	28	7	4
5	30	6	2
6	28	4.7	-2
7	25	3.6	-3

b. Questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti decrescenti del lavoro? Argomentate.

Sì, questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti decrescenti del lavoro. Il prodotto marginale del lavoro, la produzione aggiuntiva dovuta a ciascun lavoratore in più, diminuisce mano a mano che si aggiungono nuovi lavoratori, e ciò inizia a verificarsi a partire dalla seconda unità di lavoro.

c. Spiegate intuitivamente che cosa potrebbe far sì che il prodotto marginale del lavoro diventi negativo.

Il fatto che il prodotto marginale del lavoro sia negativo per $L > 5$ può dipendere dalla congestione della fabbrica. Poiché la stessa quantità fissa di capitale viene utilizzata da un numero maggiore di lavoratori, è possibile che questi si intralcino a vicenda e che perciò l'efficienza e la produzione diminuiscano. Le imprese devono controllare anche la qualità del prodotto; l'eccesso di lavoratori potrebbe portare alla produzione di beni invendibili perché di qualità troppo bassa, e ciò contribuirebbe a determinare un prodotto marginale negativo.

3. Compilate gli spazi vuoti della seguente tabella.

Quantità del fattore variabile	Produzione totale	Prodotto marginale del fattore variabile	Prodotto medio del fattore variabile
0	0	—	—
1	225		
2			300
3		300	
4	1140		
5		225	
6			225

Quantità del fattore variabile	Produzione totale	Prodotto marginale del fattore variabile	Prodotto medio del fattore variabile
0	0	—	—
1	225	225	225
2	600	375	300
3	900	300	300
4	1140	240	285
5	1365	225	273
6	1350	–15	225

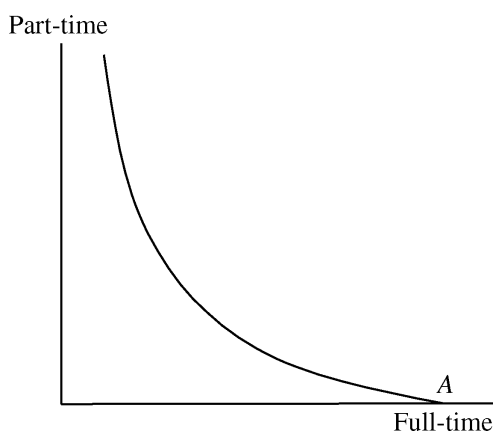
- 4. Il coordinatore di una campagna elettorale deve decidere se puntare sugli spot televisivi o se invece inviare lettere ai potenziali elettori. Descrivete la funzione di produzione dei voti. In che modo le informazioni su questa funzione (per esempio la forma degli isoquanti) potrebbero aiutare il coordinatore della campagna a definire una strategia?**

Il livello di produzione cui il coordinatore della campagna è interessato è il numero di voti. La funzione di produzione contempla due fattori, gli spot televisivi e le lettere. L'uso di questi fattori richiede la conoscenza delle possibilità di sostituzione tra essi. Se i fattori di produzione sono perfettamente sostituiti, per esempio, gli isoquanti sono linee rette e il coordinatore dovrebbe utilizzare solamente il fattore meno costoso. Se i fattori non sono perfettamente intercambiabili, gli isoquanti hanno una forma convessa. Il coordinatore dovrebbe spendere il budget della campagna sulla combinazione dei due fattori che massimizza il numero dei voti.

5. Per ciascuno dei seguenti esempi, tracciate un isoquanto rappresentativo. Che cosa si può dire del saggio marginale di sostituzione tecnica in ciascun caso?

- a. Un'impresa può scegliere di assumere solo dipendenti a tempo pieno, oppure alcuni lavoratori a tempo pieno e altri part-time. Per ogni lavoratore a tempo pieno in meno, l'impresa deve assumere un numero crescente di dipendenti a tempo parziale per mantenere costante il livello della produzione.**

Collocate i lavoratori a tempo parziale sull'asse verticale e quelli a tempo pieno sull'asse orizzontale. L'inclinazione dell'isoquanto misura il numero di lavoratori a tempo parziale che possono essere scambiati con uno a tempo pieno mantenendo costante il livello di produzione. All'estremità inferiore dell'isoquanto, nel punto A, l'isoquanto tocca l'asse dei lavoratori a tempo pieno perché esiste la possibilità di produrre anche senza alcun lavoratore part-time, con i soli lavoratori a tempo pieno. Quando ci si sposta verso l'alto lungo l'isoquanto e il numero di lavoratori a tempo pieno diminuisce, occorre assumere un numero sempre maggiore di lavoratori a tempo parziale per sostituire quelli a tempo pieno. L'inclinazione aumenta (in valore assoluto) mano a mano che ci si sposta lungo l'isoquanto. L'isoquanto è quindi convesso e il saggio marginale di sostituzione tecnica è decrescente.



- b. Un'impresa scopre di poter sempre scambiare due unità di lavoro con una di capitale, mantenendo invariato il livello di produzione.**

Il tasso marginale di sostituzione tecnica misura il numero di unità di capitale che possono essere scambiate con una di lavoro mantenendo invariata la produzione. Se l'impresa può sempre scambiare due unità di lavoro con una di capitale, allora l' $SMST$ di lavoro e capitale è costante ed è pari a $1/2$, e l'isoquanto è lineare.

- c. A un'impresa occorrono esattamente due lavoratori a tempo pieno per far funzionare ogni macchina.**

L'impresa opera con una tecnologia a proporzioni fisse, e gli isoquanti sono a forma di L. L'impresa non può sostituire il lavoro con il capitale mantenendo invariato il livello di produzione, perché deve mantenere un rapporto fisso di 2:1 tra lavoro e capitale. L' $SMST$ è infinito (o indefinito) lungo il tratto verticale dell'isoquanto e nullo lungo il tratto orizzontale.

6. Un'impresa ha un processo produttivo nel quale i fattori di produzione sono perfettamente intercambiabili nel lungo periodo. Siete in grado di dire se il saggio marginale di sostituzione tecnica sia alto o basso, o ritenete che occorran altre informazioni? Argomentate.

Sono necessarie altre informazioni. Il saggio marginale di sostituzione tecnica, $SMST$, è il valore assoluto dell'inclinazione di un isoquante. Se i fattori produttivi sono perfettamente intercambiabili, gli isoquanti sono lineari. Per calcolare l'inclinazione dell'isoquante, e quindi l' $SMST$, occorre conoscere il saggio al quale un fattore può essere sostituito con l'altro. In questo caso, non sappiamo se l' $SMST$ sia alto o basso. Sappiamo solamente che è costante. Per determinare l' $SMST$ occorre conoscere il prodotto marginale di ciascun fattore produttivo.

7. Il prodotto marginale del lavoro nella fabbricazione di microchip per computer è di 50 unità l'ora. Il saggio marginale di sostituzione tecnica delle ore-uomo rispetto alle ore-macchina è $1/4$. Qual è il prodotto marginale del capitale?

Il saggio marginale di sostituzione tecnica è definito come il rapporto tra i due prodotti marginali. In questo caso conosciamo il prodotto marginale del lavoro e il saggio marginale di sostituzione tecnica. Per determinare il prodotto marginale del lavoro, sostituiamo i valori dati del prodotto marginale del lavoro e del saggio di sostituzione tecnica nella formula seguente:

$$\frac{P'_L}{P'_K} = SMST, \text{ o } \frac{50}{P'_K} = \frac{1}{4},$$

e perciò, $P'_K = 200$ microchip l'ora.

8. Le funzioni seguenti sono caratterizzate da rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti? Che cosa accade al prodotto marginale di ciascun fattore quando la quantità del fattore aumenta e quella dell'altro fattore rimane costante?

a. $q = 3L + 2K$

Questa funzione è caratterizzata da rendimenti di scala costanti. Per esempio, se L è 2 e K è 2, allora q è 10.

Se L è 4 e K è 4 allora q è 20. Quando le quantità dei fattori raddoppiano, raddoppia anche la produzione. Per questa funzione di produzione, il prodotto marginale di ciascun fattore è costante. Quando L aumenta di 1, q aumenta di 3. Quando K aumenta di 1, q aumenta di 2.

b. $q = (2L + 2K)^{\frac{1}{2}}$

Questa funzione è caratterizzata da rendimenti di scala decrescenti. Per esempio, se L è 2 e K è 2 allora q è 2,8. Se L è 4 e K è 4 allora q è 4. Quando i fattori produttivi raddoppiano, la produzione aumenta ma non tanto da raddoppiare. Il prodotto marginale di ciascun fattore è decrescente. Ciò può essere determinato anche utilizzando il calcolo differenziale, differenziando la funzione di produzione rispetto a uno dei fattori e mantenendo costante l'altro. Per esempio, il prodotto marginale del lavoro è

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \frac{2}{2(2L + 2K)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dato che L è nel denominatore, quando L aumenta il prodotto marginale diminuisce. Se non conoscete il calcolo differenziale, potete scegliere diversi valori di L (mantenendo K fisso a un determinato livello), trovare i corrispondenti valori di q e osservare come varia il prodotto marginale. Per esempio, se $L = 4$ e $K = 4$ allora $q = 4$. Se $L = 5$ e $K = 4$ allora $q = 4,24$. Se $L = 6$ e

$K = 4$ allora $q = 4,47$. Il prodotto marginale del lavoro scende da 0,24 to 0,23. Perciò, P'_L diminuisce al crescere di L , con K costante a 4 unità.

c. $q = 3LK^2$

Questa funzione è caratterizzata da rendimenti di scala crescenti. Per esempio, se L è 2 e K è 2, allora q è 24. Se L è 4 e K è 4 allora q è 192. Quando le quantità dei fattori raddoppiano, la produzione diventa più che doppia. Notate anche che incrementando le quantità di tutti i fattori produttivi dello stesso fattore λ si ottiene quanto segue:

$$q' = 3(\lambda L)(\lambda K)^2 = \lambda^3 3LK^2 = \lambda^3 q.$$

Dato che λ è elevato a una potenza maggiore di 1, i rendimenti di scala sono crescenti.

Il prodotto marginale del lavoro è costante e il prodotto marginale del capitale è crescente. Per ogni dato valore di K , quando L viene incrementato di 1 unità, q aumenta di $3K^2$ unità, un numero costante. Utilizzando il calcolo differenziale, il prodotto marginale del capitale risulta $P'_K = 6LK$. Al crescere di K , MP_K aumenta. Se non conoscete il calcolo differenziale, potete fissare un valore di L , scegliere un valore di partenza per K e trovare q . Successivamente, incrementate K di 1 unità e trovate il nuovo valore di q . Proseguite con alcuni altri valori e potrete calcolare il prodotto marginale. È lo stesso procedimento adottato nel precedente punto c e nel punto d.

d. $q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$

Questa funzione è caratterizzata da rendimenti di scala costanti. Per esempio, se L è 2 e K è 2 allora q è 2. Se L è 4 e K è 4 allora q è 4. Quando le quantità dei fattori raddoppiano, la produzione diventa esattamente doppia. Notate inoltre che incrementando le quantità di tutti i fattori produttivi dello stesso fattore λ si ottiene quanto segue:

$$q' = (\lambda L)^{\frac{1}{2}} (\lambda K)^{\frac{1}{2}} = \lambda L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = \lambda q.$$

Dato che λ è elevato a 1, i rendimenti di scala sono costanti.

Il prodotto marginale del lavoro è decrescente e il prodotto marginale del capitale è decrescente. Utilizzando il calcolo differenziale, il prodotto marginale del capitale è

$$P'_K = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{2K^{\frac{1}{2}}}.$$

Per ogni dato valore di L , al crescere di K , P'_K decresce. Se non conoscete il calcolo differenziale, potete fissare un valore di L , scegliere un valore di partenza per K e trovare q . Poniamo per esempio $L = 4$. Se K è 4 allora q è 4, se K è 5 allora q è 4,47 e se K è 6 allora q è 4,90. Il prodotto marginale della quinta unità di K è $4,47 - 4 = 0,47$ e il prodotto marginale della sesta unità di K è $4,90 - 4,47 = 0,43$. Il prodotto marginale del capitale è quindi decrescente. Potete procedere allo stesso modo per il lavoro.

e. $q = 4L^{\frac{1}{2}} + 4K$

Questa funzione è caratterizzata da rendimenti di scala decrescenti. Per esempio, se L è 2 e K è 2 allora q è 13,66. Se L è 4 e K è 4 allora q è 24. Quando le quantità dei fattori raddoppiano, la produzione aumenta ma non tanto da raddoppiare.

Il prodotto marginale del lavoro è decrescente e il prodotto marginale del capitale è costante. Per ogni dato valore di L , quando K aumenta di 1 unità, q aumenta di 4 unità, un valore costante. Per constatare che il prodotto marginale del lavoro è decrescente, fissate $K = 1$ e scegliete dei valori per L . Se $L = 1$ allora $q = 8$, se $L = 2$ allora $q = 9,66$ e se $L = 3$ allora $q = 10,93$. Il prodotto marginale

della seconda unità di lavoro è $9,66 - 8 = 1,66$ e il prodotto marginale della terza unità di lavoro è $10,93 - 9,66 = 1,27$. Il prodotto marginale del lavoro diminuisce.

9. Un'impresa produttrice di computer, DISK s.p.a., ha una funzione di produzione data da:

$$q = 10K^{0,5}L^{0,5}$$

dove q è il numero di computer prodotti per giorno, K sono le ore-macchina e L sono le ore di lavoro. FLOPPY, un concorrente di DISK, utilizza invece la funzione di produzione:

$$q = 10K^{0,6}L^{0,4}$$

a. Se le due imprese utilizzano le stesse quantità di capitale e di lavoro, quale delle due produce di più?

Siano q_1 la produzione di DISK, q_2 la produzione di FLOPPY e X le quantità uguali di capitale e di lavoro che le due imprese utilizzano. In base alle funzioni di produzione,

$$q_1 = 10X^{0,5}X^{0,5} = 10X^{(0,5 + 0,5)} = 10X$$

e

$$q_2 = 10X^{0,6}X^{0,4} = 10X^{(0,6 + 0,4)} = 10X.$$

Dato che $q_1 = q_2$, le due imprese ottengono lo stesso livello di produzione con gli stessi fattori produttivi. Notate che se le due imprese utilizzassero la stessa quantità di capitale e la stessa quantità di lavoro, senza però che la quantità di capitale sia uguale alla quantità di lavoro, allora le due imprese non avrebbero livelli di produzione uguali. Infatti, se $K > L$ allora $q_2 > q_1$, e se $L > K$ allora $q_1 > q_2$.

b. Assumendo che il capitale sia limitato a 9 ore-macchina e che il lavoro sia invece potenzialmente illimitato, in quale delle due imprese il prodotto marginale del lavoro è maggiore? Spiegate.

Con il capitale limitato a 9 ore-macchina, le funzioni di produzione diventano $q_1 = 30L^{0,5}$ e $q_2 = 37,37L^{0,4}$. Per stabilire a quale funzione di produzione corrisponda la maggiore produttività marginale del lavoro, consideriamo la tabella seguente:

L	q Impresa 1	P'_L Impresa 1	q Impresa 2	P'_L Impresa 2
0	0,0	—	0,00	—
1	30,00	30,00	37,37	37,37
2	42,43	12,43	49,31	11,94
3	51,96	9,53	57,99	8,68
4	60,00	8,04	65,06	7,07

Per ogni unità di lavoro al di sopra di 1, la produttività marginale del lavoro è maggiore per la prima impresa, DISK.

10. Nell'Esempio 6.4 il grano viene prodotto secondo la funzione di produzione:

$$q = 100(K^{0.8}L^{0.2}).$$

- a. Iniziando da 4 unità di fattore capitale e 49 di fattore lavoro, mostrate che il prodotto marginale del lavoro e quello del capitale sono entrambi decrescenti.**

Con una quantità fissa di lavoro e una variabile di capitale:

$$K = 4 \Rightarrow q = (100)(4^{0.8})(49^{0.2}) = 660,22$$

$$K = 5 \Rightarrow q = (100)(5^{0.8})(49^{0.2}) = 789,25 \Rightarrow P'_K = 129,03$$

$$K = 6 \Rightarrow q = (100)(6^{0.8})(49^{0.2}) = 913,19 \Rightarrow P'_K = 123,94$$

$$K = 7 \Rightarrow q = (100)(7^{0.8})(49^{0.2}) = 1033,04 \Rightarrow P'_K = 119,85.$$

Con una quantità fissa di capitale e una variabile di lavoro:

$$L = 49 \Rightarrow q = (100)(4^{0.8})(49^{0.2}) = 660,22$$

$$L = 50 \Rightarrow q = (100)(4^{0.8})(50^{0.2}) = 662,89 \Rightarrow MP_L = 2,67$$

$$L = 51 \Rightarrow q = (100)(4^{0.8})(51^{0.2}) = 665,52 \Rightarrow MP_L = 2,63$$

$$L = 52 \Rightarrow q = (100)(4^{0.8})(52^{0.2}) = 668,11 \Rightarrow MP_L = 2,59.$$

Sia il prodotto marginale del capitale sia quello del lavoro decrescono al crescere della quantità del fattore variabile.

- b. Questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala crescenti, decrescenti o costanti?**

Rendimenti di scala costanti (crescenti, decrescenti) implicano che un determinato incremento dei fattori di produzione produce un incremento della produzione proporzionalmente uguale (maggiore, minore). Se in questa funzione di produzione incrementassimo lavoro e capitale della stessa proporzione (λ), la produzione varierebbe della medesima proporzione.

$$q' = 100(\lambda K)^{0.8}(\lambda L)^{0.2}, \text{ ovvero}$$

$$q' = 100K^{0.8}L^{0.2}\lambda^{(0.8+0.2)} = q\lambda$$

Quindi questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala costanti. È possibile stabilirlo anche inserendo dei valori per K e L e calcolando q , e poi raddoppiando i valori di K e L per scoprire cosa accada a q . Per esempio, siano $K = 4$ e $L = 10$. Allora $q = 480,45$. Ora raddoppiamo entrambi i fattori: $K = 8$ e $L = 20$. Il nuovo valore di q è 960,90, esattamente il doppio del precedente. Perciò, i rendimenti di scala sono costanti.

11. Supponiamo che l'aspettativa di vita in anni (L) sia funzione di due fattori produttivi, spesa sanitaria (H) e spesa alimentare (N), espressi in centinaia di dollari l'anno. La funzione di produzione è $L = c H^{0.8} N^{0.2}$.

- a. Partendo da una spesa sanitaria di \$400 l'anno ($H = 4$) e da una spesa alimentare di \$4900 l'anno ($N = 49$), mostrate che il prodotto marginale della spesa sanitaria e il prodotto marginale della spesa alimentare sono entrambi decrescenti.**

Quando $H = 4$ e $N = 49$, $L = c(4^{0.8})(49^{0.2}) = 6,602c$. Mantenendo costante N a 49, quando $H = 5$, $L = 7,893c$, e quando $H = 6$, $L = 9,132c$. Il prodotto marginale di H scende da 1,291c ($7,893c - 6,602c$) a 1,239c ($9,132c - 7,893c$). Quindi il prodotto marginale della spesa sanitaria è decrescente.

Ora mantenete costante H a 4 e incrementate N a 50. $L = c(4^{0.8})(50^{0.2}) = 6,629c$. Incrementando N a 51, $L = 6,655c$. Il prodotto marginale di N scende da 0,027c ($6,629c - 6,602c$) a 0,026c ($6,655c - 6,629c$), quindi il prodotto marginale della spesa alimentare è decrescente.

- b. Questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala crescenti, decrescenti o costanti?**

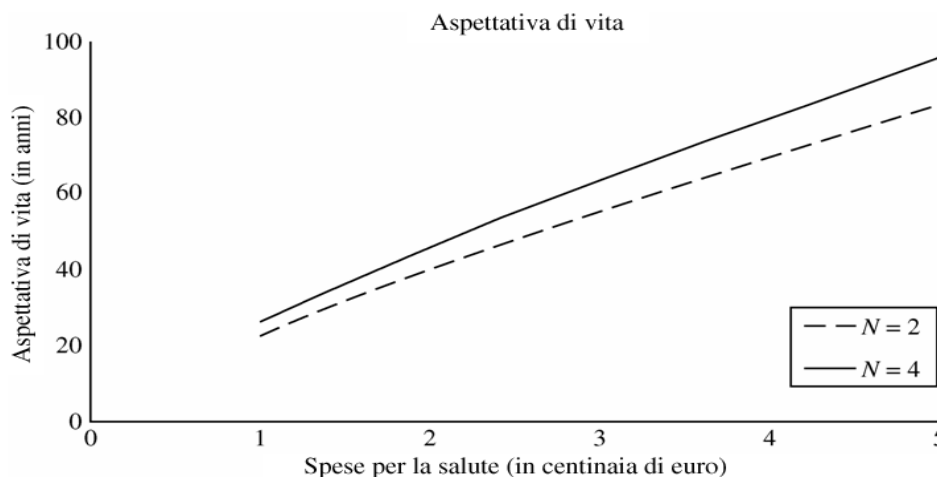
I rendimenti di scala sono costanti. Se le quantità di entrambi i fattori di produzione vengono raddoppiati, il nuovo livello di produzione è $L' = c(2H)^{0.8}(2N)^{0.2} = cH^{0.8}N^{0.2}(2^{0.8})(2^{0.2}) = 2cH^{0.8}N^{0.2} = 2L$. Quindi, quando entrambi i fattori produttivi raddoppiano, l'aspettativa di vita raddoppia a sua volta. I rendimenti di scala sono quindi costanti.

- c. Supponiamo ora che in un paese colpito da una carestia N sia costante e uguale a 2, mentre $c = 20$. Tracciate la funzione di produzione dell'aspettativa di vita come funzione della spesa sanitaria, con L sull'asse verticale e H sull'asse orizzontale.**

La funzione di produzione diventa $L = 20(H^{0.8})(2^{0.2}) = 22,974H^{0.8}$. Per tracciarla, trovate l'aspettativa di vita corrispondente a vari livelli di H , indicate nel diagramma i punti corrispondenti e tracciate una curva che passi attraverso di essi. Ecco alcuni punti: $H = 1$ e $L = 22,97$; $H = 2$ e $L = 40,00$; $H = 3$ e $L = 55,38$; $H = 4$ e $L = 69,64$; $H = 5$ e $L = 83,26$. Questa funzione di produzione è tracciata nel diagramma seguente con una linea tratteggiata.

- d. Supponiamo ora che un altro paese fornisca aiuti alimentari a quello colpito dalla carestia, così che N salga a 4. Tracciate la nuova funzione di produzione.**

La funzione di produzione diventa $L = 20(H^{0.8})(4^{0.2}) = 26,390H^{0.8}$. Alcuni punti da tracciare sono $H = 1$ e $L = 26,39$; $H = 2$ e $L = 45,95$; $H = 3$ e $L = 63,55$; $H = 4$ e $L = 80,00$; $H = 5$ e $L = 95,63$. Questa funzione di produzione è tracciata nel diagramma seguente con una linea continua.



- e. Supponiamo ora che $N = 4$ e $H = 2$. Siete i dirigenti di una organizzazione in grado di fornire al paese aiuti alimentari oppure cure mediche. Quale aiuto determinerebbe il maggior beneficio, tra un incremento unitario di H e un incremento unitario di N ?**

Se $N = 4$ e $H = 2$, l'aspettativa di vita è di 45,95 anni come calcolato nel punto d. Se N rimane a 4 e H aumenta di 1 (quindi $H = 3$), l'aspettativa di vita sale a 63,55 anni come mostrato nel punto d. Viceversa, se H rimane 2 e N aumenta di 1 ($N = 5$), l'aspettativa di vita sale a $20(2^{0.8})(5^{0.2}) = 48,05$. È chiaramente molto più utile incrementare H di 1, perché in questo modo l'aspettativa di vita sale a 63,55 anni. Un incremento unitario di N fa salire l'aspettativa di vita solo a 48,05 anni.