

Capitolo 7

■ Esercizi

1. Giovanni lascia il suo lavoro di programmatore, in cui percepiva un salario annuo di €50.000, per avviare un'impresa di software in un edificio di sua proprietà che in precedenza affittava a €24.000 l'anno. Nel primo anno di attività deve sostenere le spese seguenti: salario corrisposto a sé stesso, €40.000; noleggio, €0; altre spese, €25.000. Determinate il costo contabile e il costo economico dell'impresa di software di Giovanni.

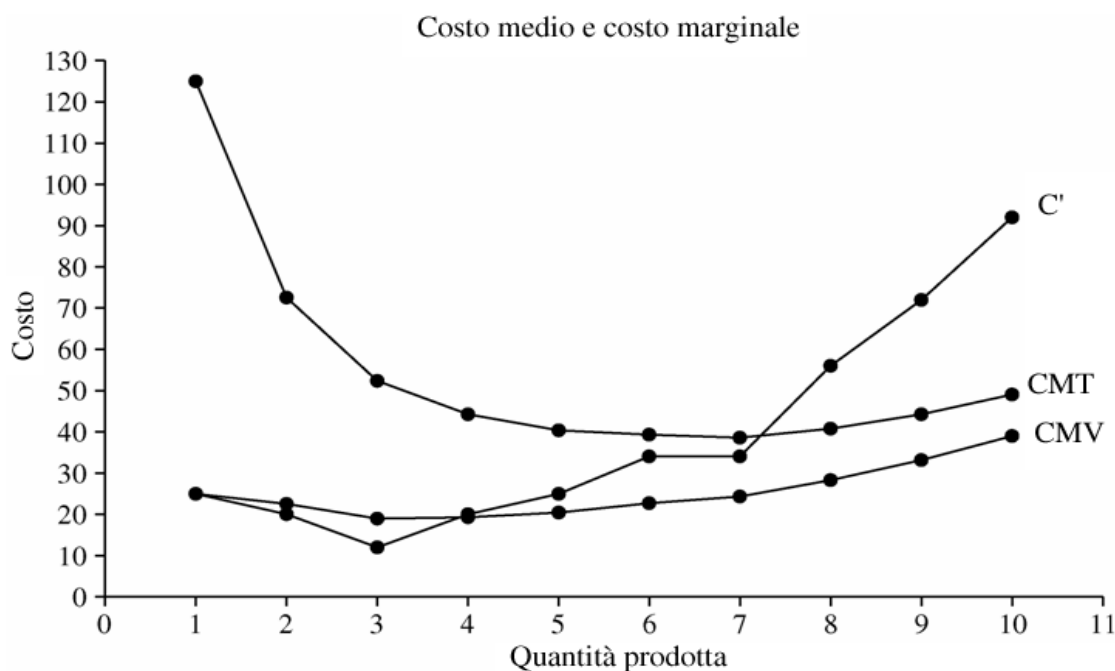
Il costo contabile comprende solo le spese esplicite, cioè il salario di Giovanni e le altre spese: €40.000 + 25.000 = €65.000. Il costo economico comprende sia queste spese esplicite sia i costi-opportunità. Nel costo economico vanno quindi inclusi €24.000 cui Giovanni rinuncia non affittando l'edificio e altri €10.000, dato che percepisce un salario di €10.000 più basso rispetto a quello di mercato (€50.000 – 40.000). Il costo economico è quindi €40.000 + 25.000 + 24.000 + 10.000 = €99.000.

2. a. Riempite gli spazi vuoti nella tabella seguente.

Unità prodotte	Costo fisso	Costo variabile	Costo totale	Costo marginale	Costo medio fisso	Costo medio variabile	Costo medio totale
0	100	0	100	—	—	—	—
1	100	25	125	25	100	25	125
2	100	45	145	20	50	22,50	72,50
3	100	57	157	12	33,33	19,00	52,33
4	100	77	177	20	25,00	19,25	44,25
5	100	102	202	25	20,00	20,40	40,40
6	100	136	236	34	16,67	22,67	39,33
7	100	170	270	34	14,29	24,29	38,57
8	100	226	326	56	12,50	28,25	40,75
9	100	298	398	72	11,11	33,11	44,22
10	100	390	490	92	10,00	39,00	49,00

- b. Tracciate un grafico che mostri costo marginale, costo medio variabile e costo medio totale, rappresentando il costo sull'asse verticale e la quantità sull'asse orizzontale.**

Il costo medio totale è a forma di U e raggiunge il minimo a un livello di produzione di circa 7 unità. Anche il costo medio variabile è a forma di U e raggiunge il minimo quando il livello di produzione è tra 3 e 4. Notate che il costo medio variabile è sempre inferiore al costo medio totale. La differenza tra i due costi è il costo medio fisso. Inizialmente, fino alla quantità 3, il costo marginale decresce; oltre il livello 3, cresce al crescere di q . Il costo marginale dovrebbe intersecare il costo medio variabile e il costo medio totale nei rispettivi punti di minimo, sebbene ciò non si rifletta con precisione nella tabella né nel grafico. Se nel problema fossero state date delle specifiche funzioni, invece di una serie di numeri, allora sarebbe possibile individuare con esattezza il punto di intersezione tra costo marginale e costo medio totale, e tra costo marginale e costo medio variabile. È probabile che le curve si intersechino in corrispondenza di una quantità non intera, quindi non elencata nella tabella né rappresentata con esattezza nel diagramma dei costi.



- 3. Un'impresa ha un costo di produzione fisso di €5000 e un costo di produzione marginale costante di €500 per unità prodotta.**

- a. Qual è la funzione di costo totale dell'impresa? E la funzione di costo medio?**

Il costo variabile della produzione di un'unità in più, il costo marginale, è costante e pari a €500, quindi $CV = 500q$, e $CMV = \frac{CV}{q} = \frac{500q}{q} = 500$. Il costo fisso è €5000, quindi il costo medio

fisso è $CMF = \frac{5000}{q}$. La funzione del costo totale è data da costo fisso più costo variabile,

ovvero $CT = 5000 + 500q$. Il costo medio totale è la somma di costo medio variabile e costo

medio fisso: $CMT = 500 + \frac{5000}{q}$.

- b. Se l'impresa volesse minimizzare il costo medio totale, sceglierebbe di operare come impresa molto grande o molto piccola? Argomentate.**

L'impresa sceglierebbe di essere molto grande, perché il costo medio totale decresce al crescere di q . Quando q è estremamente grande, CMT è approssimativamente uguale a 500, perché il costo medio fisso si approssima a zero.

- 4. Supponete che un'impresa debba pagare una tassa annuale fissa, indipendente dal fatto che produca qualcosa o meno.**

- a. Come influisce questa tassa sui costi fisso, marginale e medio dell'impresa?**

Questa tassa è un costo fisso, perché non varia con la quantità prodotta. Se T è l'importo della tassa e F il costo fisso originale dell'impresa, il nuovo costo fisso è $CFT = T + F$. La tassa non modifica il costo marginale né il costo variabile, perché non cambia con il livello di produzione. La tassa incrementa di T/q sia il costo medio fisso sia il costo medio totale.

- b. Ora supponete che l'impresa debba pagare una tassa proporzionale al numero di unità prodotte. Ancora, come influisce questa tassa sui costi fisso, marginale e medio?**

Sia t la tassa per unità prodotta. Quando viene imposta una tassa su ciascuna unità prodotta, il costo variabile totale aumenta di tq , mentre il costo fisso non cambia. Il costo medio variabile aumenta di t e, dato che i costi fissi sono costanti, anche il costo medio totale cresce di t . Inoltre, dato che il costo totale aumenta di t per ciascuna unità aggiuntiva prodotta, il costo marginale aumenta di t .

- 5. In un numero recente di *Business Week* è stato riportato quanto segue:**

Durante il recente crollo delle vendite di automobili, GM, Ford e Chrysler hanno deciso che era più conveniente vendere auto in perdita a imprese di autonoleggio, invece di licenziare lavoratori. Questo dato che chiudere e riaprire gli impianti è costoso, anche perché gli accordi sindacali correnti obbligano le imprese a pagare molti lavoratori anche se non lavorano.

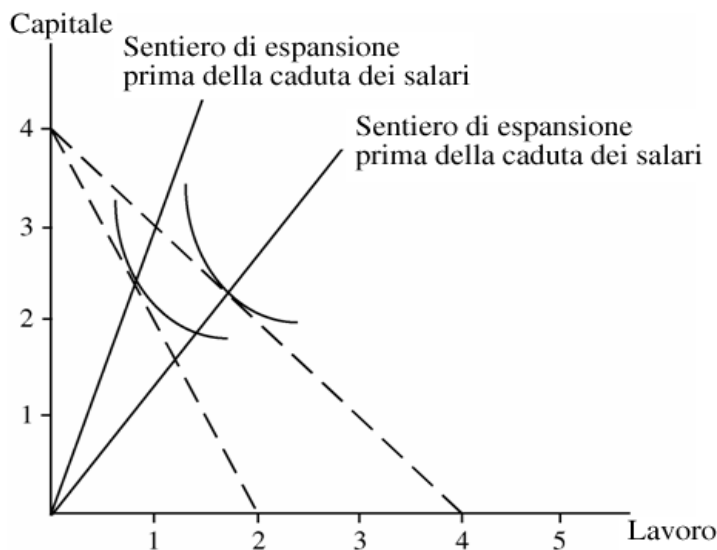
Quando l'articolo parla di vendere auto "in perdita", si riferisce al profitto contabile o economico? Che differenza c'è tra i due in questo caso? Spiegate brevemente.

Quando l'articolo parla del fatto che le case automobilistiche vendono in perdita, si riferisce al profitto contabile. Nell'articolo si sostiene che il prezzo ottenuto per la vendita delle auto alle imprese di autonoleggio sia inferiore al loro costo contabile. Il profitto economico dovrebbe essere misurato dalla differenza tra il prezzo e il costo-opportunità della produzione delle auto. In questo caso, un'importante differenza tra costo contabile e costo economico è data dal costo del lavoro. Se le case automobilistiche devono pagare molti lavoratori anche quando essi non lavorano, i salari corrisposti a questi lavoratori sono costi sommersi. Se il fabbricante di automobili non è in grado di impiegare diversamente questi lavoratori (per esempio coinvolgendoli nella riparazione degli impianti o nella preparazione della dichiarazione dei redditi dell'impresa), il costo-opportunità del loro impiego nella produzione di auto da destinare al noleggio è nullo. Dato che gli stipendi vengono inclusi nei costi contabili, i costi contabili saranno più alti di quelli economici e faranno sì che il profitto contabile sia inferiore rispetto al profitto economico.

6. Supponete che l'economia entri in recessione, che il costo del lavoro cali del 50 per cento e che si preveda che tale livello sia mantenuto per lungo tempo. Rappresentate graficamente come questa variazione del prezzo relativo del lavoro e del capitale influisca sul sentiero di espansione dell'impresa.

La figura seguente mostra una serie di isoquanti e due curve di isocosto. Le unità di capitale sono associate all'asse verticale e quelle di lavoro all'asse orizzontale (*Nota:* nella figura si assume che la funzione di produzione sottostante gli isoquanti implichi percorsi di espansione lineari. I risultati, comunque, non dipendono da questo assunto).

Se il prezzo del lavoro diminuisce del 50% mentre il prezzo del capitale rimane costante, le rette di isocosto ruotano spostandosi verso destra. Poiché il percorso di espansione è la serie di punti in cui il *SMST* è uguale al rapporto tra i prezzi, più le rette di isocosto tendono a essere orizzontali più il percorso di espansione diventa orizzontale e si muove verso l'asse del lavoro. Ne consegue che l'impresa utilizza più lavoro rispetto al capitale perché il lavoro è diventato meno costoso.



7. Il costo di far volare un aereo passeggeri dal punto A al punto B è di €50.000. La linea aerea percorre questa rotta quattro volte al giorno alle ore 7, 10, 13 e 16. Il primo e l'ultimo volo sono riempiti alla massima capacità con 240 persone; il secondo e il terzo sono riempiti solo a metà. Determinate il costo medio per passeggero per ciascun volo. Supponete che la linea aerea vi ingaggi come consulente di marketing e voglia sapere a quale tipo di cliente dovrebbe rivolgersi, quello che viaggia in orari di scarso afflusso (i due voli centrali) o quello che sceglie le ore di punta (il primo e l'ultimo volo). Che parere fornireste?

Il costo medio per passeggero è $€50.000/240 = €208,33$ per i voli pieni e $€50.000/120 = €416,67$ per quelli con solo metà dei passeggeri. La linea aerea dovrebbe cercare di attrarre un numero maggiore di viaggiatori negli orari di scarso afflusso, perché nei due voli centrali della giornata si ha un eccesso di capacità. Il costo marginale da sostenere per far viaggiare un passeggero in più su uno di questi voli è quasi nullo, quindi la compagnia incrementerà il profitto se riuscirà a vendere altri biglietti per questi voli, anche se li venderà a prezzi inferiori al costo medio. I voli delle ore di punta sono già pieni, quindi attrarre più clienti in questi orari non consente di vendere altri biglietti.

8. Gestite un impianto che produce motori in serie, con squadre di lavoratori addetti a macchine di assemblaggio. La tecnologia è rappresentata dalla funzione di produzione:

$$q = 5KL$$

dove q è il numero di motori prodotti alla settimana, K è il numero di macchine di assemblaggio e L è il numero di squadre di lavoratori. Ogni macchina di assemblaggio è affittata al costo di $r = €10.000$ la settimana e ogni squadra costa $w = €5000$ la settimana. I costi di un motore sono dati dal costo dei lavoratori e dei macchinari, più €2000 a motore per le materie prime. L'impianto prevede nel progetto un'installazione fissa di 5 macchine di assemblaggio.

- a. Qual è la funzione di costo dell'impianto, ovvero, quanto costa produrre q motori? Quali sono i costi medio e marginale per produrre q motori? Come variano i costi medi al variare della produzione?

La funzione di produzione di breve periodo è $q = 5(5)L = 25L$, perché K è fisso a 5. Quindi, per ogni livello di produzione q , il numero di squadre di lavoratori è $L = \frac{q}{25}$. La funzione del costo totale è quindi data dalla somma dei costi di capitale, lavoro e materie prime:

$$TC(q) = rK + wL + 2.000q = (10.000)(5) + (5.000)\left(\frac{q}{25}\right) + 2.000q$$

$$TC(q) = 50.000 + 2.200q.$$

La funzione del costo medio è quindi data da:

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{50.000 + 2.200q}{q}.$$

e la funzione del costo marginale è data da:

$$MC(q) = \frac{dTC}{dq} = 2.200.$$

I costi marginali sono costanti e pari a €2.200 per motore; i costi medi diminuiranno al crescere della quantità perché il costo medio fisso del capitale decresce.

- b. Quante squadre di lavoratori servono per produrre 250 motori? Qual è il costo medio per motore?

Per produrre $q = 250$ motori occorre $L = \frac{q}{25}$, cioè $L = 10$ squadre di lavoratori. Il costo medio è €2.400 come mostrato di seguito:

$$AC(q = 250) = \frac{50.000 + 2.200(250)}{250} = 2.400.$$

- c. Vi viene chiesto di fornire suggerimenti per il progetto di un nuovo impianto di produzione. Quale rapporto capitale/lavoro (K/L) dovrebbe prevedere il nuovo impianto, per ridurre al minimo il costo totale di produzione con qualsiasi livello di produzione q ?

In questo caso non assumiamo che K sia fisso a 5. Dobbiamo trovare la combinazione di K e L che minimizza il costo a ogni livello di produzione q . La condizione di minimizzazione del costo è data da

$$\frac{P'_K}{r} = \frac{P'_L}{w}.$$

Per trovare il prodotto marginale del capitale, osserviamo che quando si incrementa K di 1 unità, q aumenta di $5L$, quindi $P'_K = 5L$. Analogamente, osserviamo che quando si incrementa L di 1 unità, q aumenta di $5K$, quindi $P'_L = 5K$. In termini matematici,

$$P'_K = \frac{\partial q}{\partial K} = 5L \text{ e } P'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 5K.$$

Utilizzando queste formule nella condizione di minimizzazione del costo, si ottiene:

$$\frac{5L}{r} = \frac{5K}{w} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{5.000}{10.000} = \frac{1}{2}.$$

Il nuovo impianto dovrebbe avere un rapporto tra capitale e lavoro di 1 a 2, e ciò vale indipendentemente dal numero di unità prodotte.

- 9. La funzione di costo di breve periodo di un'impresa è data dall'equazione $C = 200 + 55q$, dove C è il costo totale e q è la quantità di produzione totale, entrambi misurati in migliaia di unità.**

- a. Qual è il costo fisso dell'impresa?**

Quando $q = 0$, $CT = 200$, quindi il costo fisso è uguale a 200 (o €200.000).

- b. Se l'impresa producesse 100.000 unità di prodotto, quale sarebbe il costo medio variabile?**

Con 100.000 unità, $q = 100$. Il costo variabile è $55q = (55)(100) = 5.500$ (ovvero €5.500.000). Il costo medio variabile è $\frac{CV}{q} = \frac{5.500}{100} = 55$ (ovvero €55.000).

- c. Quale sarebbe il costo marginale di produzione?**

Poiché il costo medio variabile è costante, il costo marginale è uguale al costo medio variabile, cioè 55 (ovvero €55.000).

- d. Quale sarebbe il costo medio fisso?**

Con $q = 100$, il costo medio fisso è $\frac{CF}{q} = \frac{200}{100} = 2$ (ovvero €2.000).

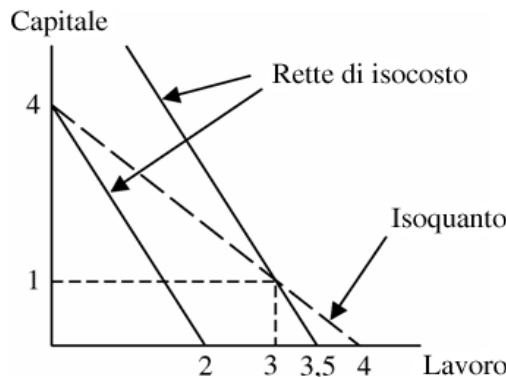
- e. Supponete che l'impresa sottoscriva un prestito e proceda all'ampliamento dello stabilimento. Il costo fisso aumenta di €50.000, ma il costo variabile scende a €45.000 per 1000 unità. Nell'equazione rientra anche il costo degli interessi (i). Ogni incremento percentuale del tasso di interesse fa salire i costi di €3000. Scrivete la nuova equazione del costo.**

Il costo fisso, misurato in migliaia di euro, passa da 200 a 250. Il costo variabile, anch'esso in migliaia di euro, scende da 55 a 45. Il costo fisso comprende anche il costo degli interessi, pari a $3i$. L'equazione del costo è $CT = 250 + 45q + 3i$.

10. Un produttore di sedie affitta il lavoro alla linea di assemblaggio per €30 l'ora e calcola che il costo di noleggio dei macchinari è di €15 l'ora. Supponete che una sedia si possa produrre usando 4 ore di lavoro o macchinari in qualsiasi combinazione dei fattori. Se l'impresa impiega attualmente 3 ore di lavoro per ogni ora di tempo-macchina, sta minimizzando i costi di produzione? Se sì, perché? Se no, come può migliorare la situazione? Rappresentate graficamente l'isoquante e le due rette di isocosto per la combinazione di lavoro e capitale attuale e per quella ottimale.

Se l'impresa è in grado di produrre una sedia con quattro ore di lavoro oppure con quattro ore-macchina (ovvero, unità di capitale), o con una qualsiasi combinazione dei due fattori, allora l'isoquante è una linea retta avente inclinazione -1 e intercette $K = 4$ e $L = 4$ (la linea tratteggiata).

Le rette di isocosto, $CT = 30L + 15K$, hanno inclinazione $-30/15 = -2$, con il capitale sull'asse verticale; le intercette sono $K = CT/15$ e $L = CT/30$. Il punto di minimizzazione del costo è la soluzione d'angolo con $L = 0$ e $K = 4$, quindi al momento l'impresa non sta minimizzando i costi. Nel punto ottimale, il costo totale è €60. Nel grafico sono tracciate due rette di isocosto. La prima è più lontana dall'origine e rappresenta il costo sostenuto attualmente (€105) per 3 unità di lavoro e 1 di capitale. Per l'impresa è ottimale passare alla seconda retta di isocosto, più vicina all'origine, che rappresenta un costo inferiore (€60). In generale, l'impresa desidera trovarsi sulla più bassa retta di isocosto che intersechi o sia tangente all'isoquante dato.

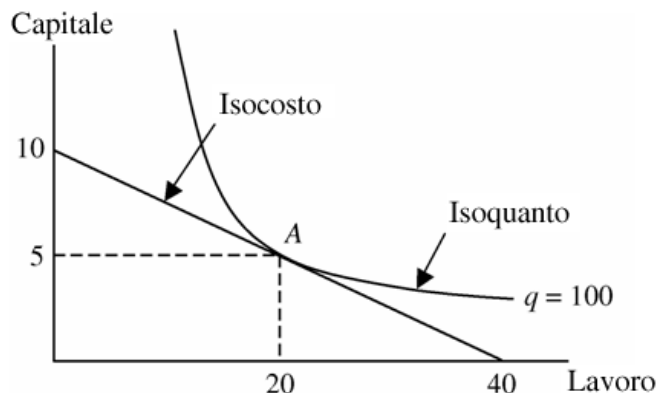


11. Supponete che la funzione di produzione di un'impresa sia: $q = 10L^{1/2}K^{1/2}$. Il costo di una unità di lavoro è €20 e il costo di una unità di capitale è €80.

- a. L'impresa attualmente produce 100 unità di prodotto e ha determinato che le quantità di lavoro e capitale che minimizzano i costi sono, rispettivamente, 20 e 5. Rappresentate graficamente la situazione utilizzando isoquanti e linee di isocosto.

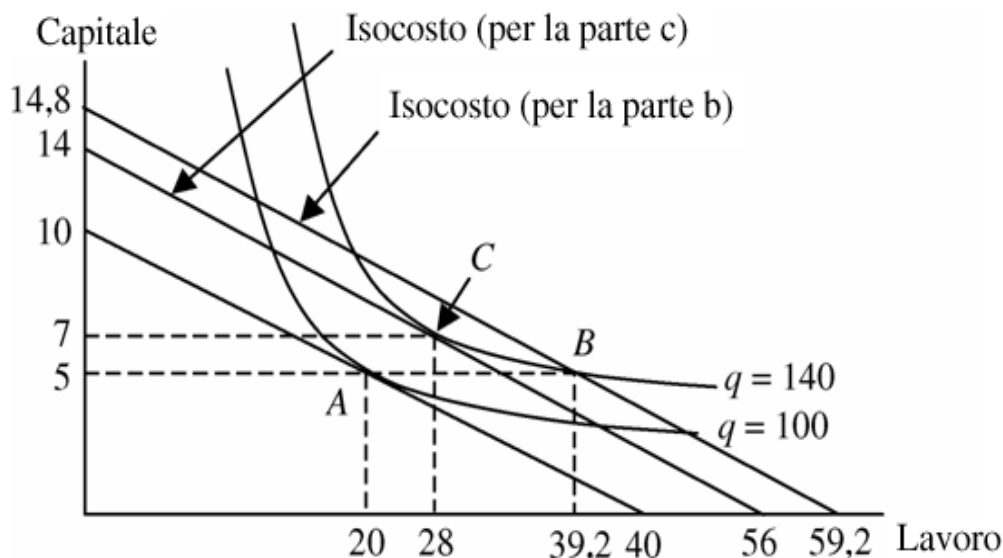
Per tracciare l'isoquante, ponete $q = 100$ nella funzione di produzione e risolvete rispetto a K .

Risolvendo rispetto a K : $K^{1/2} = \frac{q}{10L^{1/2}}$ Sostituite q con 100 ed elevate al quadrato entrambi i membri. L'isoquante è $K = 100/L$. Scegliete varie combinazioni di L e K e indicatele nel grafico. L'isoquante è convessa. Le quantità ottimali di lavoro e capitale sono date dal punto in cui la retta di isocosto è tangente all'isoquante. La retta di isocosto ha inclinazione $-1/4$, se il lavoro è sull'asse orizzontale. Il costo totale è $CT = (€20)(20) + (€80)(5) = €800$, quindi la retta di isocosto ha equazione $20L + 80K = 800$, ovvero $K = 10 - 0,25L$, con intercette $K = 10$ e $L = 40$. Il punto ottimale è indicato con A nel grafico.



- b. L'impresa ora vuole aumentare la produzione a 140 unità. Se il capitale è fisso nel breve periodo, quanto lavoro servirà? Rappresentate graficamente la situazione e determinate il nuovo costo totale dell'impresa.

Il nuovo livello del lavoro è 39,2. Per verificarlo, utilizzate la funzione di produzione $q = 10L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$ e inserite i valori 140 per la produzione e 5 per il capitale, quindi risolvete rispetto a L . Il nuovo costo è $CT = (\text{€}20)(39,2) + (\text{€}80)(5) = \text{€}1.184$. Il nuovo isoquante per una produzione di 140 si trova al di sopra e a destra dell'isoquante iniziale. Dato che nel breve periodo il capitale è fisso, l'impresa si sposterà orizzontalmente verso destra fino al nuovo isoquante e alla nuova quantità di lavoro, ovvero al punto B del grafico seguente. Non è il punto che minimizza il costo di lungo periodo ma è il meglio che l'impresa possa fare nel breve periodo con K fisso a 5. Potete capire che non si tratta dell'ottimo di lungo periodo dal fatto che nel punto B l'isocosto non è tangente all'isoquante. Inoltre vi sono punti del nuovo isoquante ($q = 140$) che si trovano al di sotto della nuova retta di isocosto (per la parte b), punti cui corrispondono una quantità maggiore di capitale e una minore di lavoro.



- c. **Identificate graficamente il livello di capitale e lavoro che minimizza i costi nel lungo periodo se l'impresa vuole produrre 140 unità.**

È il punto *C* del grafico soprastante. Quando si trova nel punto *B*, l'impresa non minimizza il costo. Per l'impresa è ottimale impiegare più capitale e meno lavoro passando alla nuova e più bassa retta di isocosto (per la parte c) tangente all'isoquante $q = 140$. Notate che le tre rette di isocosto sono parallele e hanno la medesima inclinazione.

- d. **Se il saggio marginale di sostituzione tecnica è K/L , determinate il livello ottimale di capitale e lavoro richiesto per produrre 140 unità.**

Uguagliate il saggio marginale di sostituzione tecnica e il rapporto tra i costi dei fattori

produttivi: $\frac{K}{L} = \frac{20}{80} \Rightarrow K = \frac{L}{4}$. Ora sostituite questo valore di K nella funzione di produzione,

assegnate a q il valore 140 e risolvete rispetto a L : $140 = 10L^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L = 28, K = 7$. È il punto *C*

del grafico. Il nuovo costo è $CT = (\text{€}20)(28) + (\text{€}80)(7) = \text{€}1.120$ ed è minore che nel breve periodo (parte b), perché nel lungo periodo l'impresa può modificare le quantità di tutti i fattori.

12. **La funzione di costo di un'impresa di informatica, che lega il costo medio di produzione CM alla produzione cumulata espressa in migliaia di computer Q e alla dimensione dell'impianto in termini di migliaia di computer prodotti per anno q (nell'intervallo di produzione da 10.000 a 50.000 computer), è data da:**

$$CM = 10 - 0,1Q + 0,3q.$$

- a. **Esiste un effetto di curva di apprendimento?**

La curva di apprendimento descrive la relazione tra la produzione cumulata e i fattori produttivi necessari per produrre un'unità. Il costo medio misura il fabbisogno di fattori per unità di prodotto. Esiste un effetto di curva di apprendimento se il costo medio diminuisce all'aumentare della produzione cumulata. In questo caso, il costo medio diminuisce di €0,10 ogni volta che la produzione cumulata Q aumenta di 1.000. Perciò, è presente un effetto di curva di apprendimento.

- b. **Esistono economie o diseconomie di scala?**

Esistono diseconomie di scala. A parità di produzione cumulata, Q , si hanno diseconomie di scala se il costo medio aumenta all'aumentare della produzione annua q . In questo esempio, il costo medio aumenta di €0,30 a ogni incremento della produzione di mille unità, quindi siamo in presenza di diseconomie di scala.

- c. **Durante la sua esistenza l'impresa ha prodotto un totale di 40.000 computer e quest'anno ne sta producendo 10.000. L'anno prossimo intende aumentare la produzione a 12.000. Il costo medio di produzione aumenterà o diminuirà? Argomentate la vostra risposta.**

Prima di tutto, calcolate il costo medio per quest'anno:

$$CM_1 = 10 - 0,1Q + 0,3q = 10 - (0,1)(40) + (0,3)(10) = 9,00.$$

Poi, calcolate il costo medio per il prossimo anno:

$$CM_2 = 10 - (0,1)(50) + (0,3)(12) = 8,60.$$

(Nota: la produzione cumulata è aumentata da 40.000 a 50.000, quindi il prossimo anno $Q = 50$)
Il costo medio diminuirà per l'effetto di apprendimento, nonostante le diseconomie di scala che si manifestano con l'aumento della produzione annua da 10.000 a 12.000 computer.

13. Supponete che la funzione di costo totale di lungo periodo per un settore industriale sia data dall'equazione cubica $C = a + bq + cq^2 + dq^3$. Mostrate (ricorrendo all'analisi matematica) che questa funzione è coerente con una curva di costo medio di forma a U per almeno alcuni valori di a, b, c e d .

Per mostrare che l'equazione di costo cubica implica una curva del costo medio a forma di U utilizziamo algebra, calcolo e strumenti economici per ricavare dei vincoli per i parametri dell'equazione. Queste tecniche sono illustrate dall'esempio che segue.

In primo luogo, se la produzione è uguale a zero, allora $CT = a$, dove a rappresenta i costi fissi. Nel breve periodo i costi fissi sono positivi, $a > 0$, ma nel lungo periodo, dove tutti i fattori di produzione sono variabili, $a = 0$. Stabiliamo quindi che a sia uguale a zero.

Sappiamo poi che il costo medio deve essere positivo. Dividendo CT per q , con $a = 0$:

$$CM = b + cq + dq^2.$$

Questa equazione è semplicemente una funzione quadratica. Graficamente, può avere essenzialmente due forme: a U oppure a U rovesciata. Vogliamo una curva a U, cioè una curva che abbia un punto di minimo (il costo medio minimo), non una che abbia un punto di massimo.

In corrispondenza del minimo l'inclinazione deve essere uguale a zero, quindi la derivata prima rispetto a q della curva del costo medio deve essere uguale a zero. Per una curva del costo medio a forma di U, la derivata seconda deve essere positiva.

La derivata prima è $c + 2dq$; la derivata seconda è $2d$. Se la derivata seconda deve essere positiva, allora $d > 0$. Se la derivata prima è uguale a zero, allora esprimendo c come funzione di q e d si ottiene:

$c = -2dq$. Dato che d è positivo e che il costo medio minimo deve trovarsi in un punto in cui q è positivo, allora c deve essere negativo: $c < 0$.

Per individuare dei vincoli per b , sappiamo che al suo minimo il costo medio deve essere positivo. Il minimo si ha quando $c + 2dq = 0$. Esprimete q come funzione di c e d : $q = -c/2d > 0$. Poi, sostituite questo valore di q nell'espressione del costo medio e semplificate l'equazione:

$$CM = b + cq + dq^2 = b + c\left(\frac{-c}{2d}\right) + d\left(\frac{-c}{2d}\right)^2, \text{ ovvero}$$

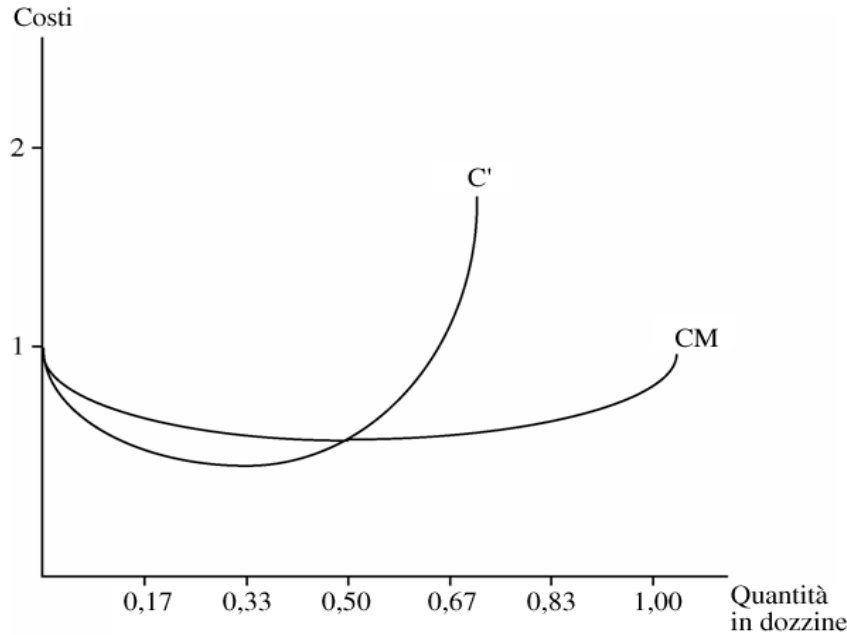
$$CM = b - \frac{c^2}{2d} + \frac{c^2}{4d} = b - \frac{2c^2}{4d} + \frac{c^2}{4d} = b - \frac{c^2}{4d} > 0.$$

Da ciò si ricava $b > \frac{c^2}{4d}$. Dato che $c^2 > 0$ e $d > 0$, b deve essere positivo.

Riassumendo, per avere curve del costo medio di lungo periodo a forma di U, a deve essere zero, b e d devono essere positivi, c deve essere negativo e $4db > c^2$. Queste condizioni, tuttavia, non garantiscono che il costo marginale sia positivo. Per assicurare che il costo marginale abbia una forma a U e che il suo minimo sia positivo, utilizzate la stessa procedura, cioè risolvete rispetto a q la condizione di minimizzazione del costo marginale: $q = -c/3d$. Poi sostituite questa espressione in quella del costo marginale: $b + 2cq + 3dq^2$. Da qui si ricava che c^2 deve essere minore di $3bd$. Notate che i valori dei

parametri che soddisfano questa condizione soddisfano anche $4db > c^2$, ma non il contrario, quindi $c^2 < 3bd$ è il requisito più stringente.

Per esempio, siano $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = 1$. Questi valori soddisfano tutti i vincoli appena individuati. Il costo totale è $q - q^2 + q^3$, il costo medio è $1 - q + q^2$ e il costo marginale è $1 - 2q + 3q^2$. Il costo medio minimo è dove $q = 1/2$ e il costo marginale minimo è dove $q = 1/3$ (considerate q come il numero di dozzine di unità, per evitare che vengano prodotte frazioni di unità). Fate riferimento alla figura sottostante.



14. Un'impresa informatica produce hardware e software utilizzando lo stesso impianto e la stessa forza lavoro. Il costo totale di produrre processori H e software S è dato da:

$$CT = aH + bS - cHS$$

dove a , b e c sono positivi. Questa funzione di costo totale è coerente con la presenza di economie o diseconomie di scala? E con economie o diseconomie di scopo?

Se ciascun prodotto venisse fabbricato separatamente non vi sarebbero né economie né diseconomie di scala. Per verificarlo, definiamo il costo totale da sostenere per produrre solamente H (che indichiamo con CT_H) come costo totale quando $S = 0$. Quindi, $CT_H = aH$. Analogamente, $CT_S = bS$. In entrambi i casi, raddoppiando il numero di unità prodotte si raddoppia il costo totale, quindi non vi sono economie né diseconomie di scala.

Esistono economie di scopo se $SC > 0$, dove, dall'equazione (7.7) del testo:

$$SC = \frac{C(q_1) + C(q_2) - C(q_1, q_2)}{C(q_1, q_2)}.$$

Nel nostro caso, $C(q_1)$ è CT_H , $C(q_2)$ è CT_S e $C(q_1, q_2)$ è CT . Quindi,

$$SC = \frac{aH + bS - (aH + bS - cHS)}{aH + bS - cHS} = \frac{cHS}{aH + bS - cHS}$$

Poiché cHS (il numeratore) e CT (il denominatore) sono entrambi positivi, si ha che $SC > 0$, e quindi esistono delle economie di scopo.

Capitolo 7 Appendice

■ Esercizi

1. Delle seguenti funzioni di produzione, quali presentano rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti?

a. $F(K, L) = K^2 L$

b. $F(K, L) = 10K + 5L$

c. $F(K, L) = (KL)^{0.5}$

I rendimenti di scala riguardano la relazione tra il livello di produzione e gli incrementi proporzionali di tutti i fattori. Ciò è rappresentato nel modo seguente (con $\lambda > 1$):

$F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K, L)$ implica rendimenti di scala crescenti;

$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ implica rendimenti di scala costanti; e

$F(\lambda K, \lambda L) < \lambda F(K, L)$ implica rendimenti di scala decrescenti.

- a. Applicando ciò a $F(K, L) = K^2 L$,

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^2 (\lambda L) = \lambda^3 K^2 L = \lambda^3 F(K, L).$$

Questa espressione è maggiore di $\lambda F(K, L)$; quindi, questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala crescenti.

- b. Applicando la stessa tecnica a $F(K, L) = 10K + 5L$,

$$F(\lambda K, \lambda L) = 10\lambda K + 5\lambda L = \lambda F(K, L).$$

Questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala costanti.

- c. Applicando la stessa tecnica a $F(K, L) = (KL)^{0.5}$,

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K, \lambda L)^{0.5} = (\lambda^2)^{0.5} (KL)^{0.5} = \lambda (KL)^{0.5} = \lambda F(K, L).$$

Questa funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala costanti.

2. La funzione di produzione per un prodotto è data da $q = 100KL$. Se il prezzo del capitale è €120 al giorno e il prezzo del lavoro è €30 al giorno, qual è il costo minimo per produrre 1000 unità?

La combinazione di capitale e lavoro che minimizza i costi è quella per cui

$$SMST = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{w}{r}.$$

Il prodotto marginale del lavoro è $\frac{\partial q}{\partial L} = 100K$. Il prodotto marginale del capitale è $\frac{\partial q}{\partial K} = 100L$. Quindi, il saggio marginale di sostituzione tecnica è

$$\frac{100K}{100L} = \frac{K}{L}.$$

Per determinare il rapporto capitale-lavoro ottimale uguagliate il saggio marginale di sostituzione tecnica e il rapporto tra il saggio salariale e il costo del capitale:

$$\frac{K}{L} = \frac{30}{120}, \text{ ovvero } L = 4K.$$

Sostituite questo valore di L nella funzione di produzione e risolvete rispetto a K con una produzione di 1.000 unità.

$$1000 = (100)(K)(4K), \text{ ovvero } K = 1,58.$$

Poiché L è uguale a $4K$ ciò significa che L è uguale a $4(1,58) = 6,32$.

Con questi livelli dei due fattori, il costo totale è:

$$CT = wL + rK, \text{ ovvero}$$

$$CT = (30)(6,32) + (120)(1,58) = €379,20.$$

- 3. Supponiamo che una funzione di produzione sia data da $F(K, L) = KL^2$; il prezzo del capitale è €10 e il prezzo del lavoro €15. Quale combinazione di lavoro e capitale minimizza il costo di produrre qualsiasi numero di unità dato?**

La combinazione di capitale e lavoro che minimizza il costo è quella per cui

$$SMST = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{w}{r}.$$

Il prodotto marginale del lavoro è $\frac{\partial q}{\partial L} = 2KL$. Il prodotto marginale del capitale è $\frac{\partial q}{\partial K} = L^2$.

Uguagliate il saggio marginale di sostituzione tecnica e il rapporto tra i prezzi dei fattori per determinare il rapporto ottimale capitale-lavoro:

$$\frac{2KL}{L^2} = \frac{15}{10}, \text{ ovvero } K = 0,75L.$$

Quindi, a qualsiasi livello di produzione, il rapporto capitale-lavoro (K/L) che minimizza il costo è 0,75. Notate che il rapporto ottimale non dipende dalla quantità di prodotto q . Le funzioni di produzione di questa forma (Cobb-Douglas) hanno questa caratteristica, che non è comune a tutte le funzioni di produzione.

- 4. Supponiamo che il processo di produrre impermeabili per un'impresa di abbigliamento sia descritto dalla funzione:**

$$q = 10K^{0,8}(L - 40)^{0,2}$$

dove q è il numero di impermeabili prodotti, K il numero di ore-macchina (macchine da cucire a controllo numerico) e L il numero di ore-persona di lavoro. Oltre a capitale e lavoro, la produzione di ogni maglione richiede €10 di materie prime.

È data la funzione di produzione: $q = F(K, L) = 10K^{0,8}(L - 40)^{0,2}$

Sappiamo anche che il costo di produzione comprende, oltre al costo del capitale e a quello del lavoro, anche €10 di materie prime per unità di prodotto. Ciò determina la seguente funzione del costo totale:

$$CT(q) = wL + rK + 10q$$

- a. **Minimizzando il costo soggetto alla funzione di produzione, ricavate la domanda di K e L che minimizza i costi come funzione della produzione (q), del tasso di salario (w) e del tasso di noleggio delle macchine (r). Utilizzate i risultati per ricavare la funzione di costo totale, che esprime i costi come funzione di q , r , w e della costante di €10 per unità di materia prima.**

Dobbiamo individuare le combinazioni di K e L che minimizzano questa funzione di costo per ogni dato livello della produzione q e dei prezzi dei fattori, r e w . Per farlo, impostiamo la Lagrangiana:

$$\Phi = wL + rK + 10q - \lambda[10K^{0.8}(L - 40)^{0.2} - q]$$

Differenziando rispetto a K , L e λ , e uguagliando le derivate a zero:

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial K} = r - 10\lambda(0,8)K^{-0.2}(L - 40)^{0.2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial L} = w - 10\lambda K^{0.8}(0,2)(L - 40)^{-0.8} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial L} = 10K^{0.8}(L - 40)^{0.2} - q = 0.$$

Notate che la (3) è stata moltiplicata per -1 . Dalle prime due equazioni si ricava:

$$r = 10\lambda(0,8)K^{-0.2}(L - 40)^{0.2} \quad \text{e} \quad w = 10\lambda K^{0.8}(0,2)(L - 40)^{-0.8}.$$

ovvero

$$\frac{r}{w} = \frac{4(L - 40)}{K}.$$

Da ciò si ottiene:

$$K = \frac{4w(L - 40)}{r} \quad \text{e} \quad L - 40 = \frac{rK}{4w}.$$

Sostituendo le precedenti espressioni per K e $(L - 40)$ nell'equazione (3), si ricavano le soluzioni per K e L :

$$q = 10 \left(\frac{4w}{r} \right)^{0.8} (L - 40)^{0.8} (L - 40)^{0.2} \quad \text{e} \quad q = 10K^{0.8} \left(\frac{rK}{4w} \right)^2.$$

ovvero

$$L = \frac{r^{0.8}q}{30,3w^{0.8}} + 40 \quad \text{e} \quad K = \frac{w^{0.2}q}{7,6r^{0.2}}.$$

Ora possiamo ottenere la funzione del costo totale in termini di r , w e q sostituendo nella funzione del costo totale questi valori di K e L che minimizzano il costo:

$$CT(q) = wL + rK + 10q$$

$$CT(q) = \frac{wr^{0,8}q}{30,3w^{0,8}} + 40w + \frac{rw^{0,2}q}{7,6r^{0,2}} + 10q$$

$$CT(q) = \frac{w^{0,2}r^{0,8}q}{30,3} + 40w + \frac{r^{0,8}w^{0,2}q}{7,6} + 10q.$$

- b. Questo processo richiede lavoratori esperti, che guadagnano €32 l'ora. Il tasso di noleggio per le macchine usate nel processo è di €64 l'ora. Con questi prezzi dei fattori produttivi, quali sono i costi totali in funzione di q ? Questa tecnologia presenta rendimenti di scala decrescenti, costanti o crescenti?

Dati i valori $w = 32$ e $r = 64$, la funzione del costo totale diventa:

$$CT(q) = 19,2q + 1.280.$$

La funzione del costo medio è quindi data da

$$CM(q) = 19,2 + 1.280/q.$$

Quindi il costo medio decresce al crescere della produzione. Per individuare i rendimenti di scala, scegliete una combinazione di fattori produttivi e trovate il livello di produzione, poi raddoppiate le quantità dei fattori e confrontate il nuovo livello di produzione con il precedente. Assumete $K = 50$ e $L = 60$. Allora $q_1 = 10(50)^{0,8}(60 - 40)^{0,2} = 416,3$. Quando $K = 100$ e $L = 120$, $q_2 = 10(100)^{0,8}(120 - 40)^{0,2} = 956,4$. Poiché $q_2/q_1 > 2$, la funzione di produzione è caratterizzata da rendimenti di scala crescenti.

- c. L'impresa pianifica la produzione di 2000 impermeabili la settimana. Con i prezzi dei fattori produttivi dati in precedenza, quanti lavoratori dovrebbe assumere (con orario di 40 ore settimanali) e quante macchine dovrebbe affittare (a 40 ore-macchina la settimana)? Quali sono i costi marginale e medio a questo livello di produzione?

Dato $q = 2000$ la settimana, possiamo calcolare le quantità necessarie dei fattori K e L utilizzando le formule ottenute nella parte a:

$$L = \frac{r^{0,8}}{30,3w^{0,8}} + 40 \text{ e } K = \frac{w^{0,2}q}{7,6r^{0,2}}.$$

Quindi $L = 154,9$ ore di lavoro e $K = 229,1$ ore-macchina. Assumendo che la settimana lavorativa sia di 40 ore, $L = 154,9/40 = 3,87$ lavoratori la settimana e $K = 229,1/40 = 5,73$ macchine la settimana. L'impresa dovrebbe assumere 4 lavoratori e affittare 6 macchine per settimana, assumendo che non possa assumere frazioni di lavoratore e di macchina.

Sappiamo che le funzioni del costo totale e del costo medio sono date da:

$$CT(q) = 19,2q + 1.280$$

$$CM(q) = 19,2 + 1.280/q,$$

quindi, la funzione del costo marginale è

$$C'(q) = dTC(q)/dq = 19,2.$$

I costi marginali sono costanti e pari a €19,20 per impermeabile e i costi medi sono pari a $19,2 + 1.280/2.000$ ovvero €19,84 per impermeabile.