

Spazio ambiente:  $\mathbb{R}^3$ . Chiameremo spesso un vettore  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  PUNTO, di coordinate  $(x, y, z)$ .

Retta • retta: ogni sottoinsieme  $r \subset \mathbb{R}^3$  del tipo  
 $P+W \stackrel{\text{def}}{=} \{P+w \mid w \in W\}$  dove  $P \in \mathbb{R}^3$  e  $W \subset \mathbb{R}^3$  è un  
 sottospazio vettoriale con  $\dim(W)=1$

• piano: ogni sottoinsieme  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  del tipo  $P+W$ ,  $P \in W$   
 come sopra salvo che  $\dim(W)=2$ .

• ogni piano in  $\mathbb{R}^3$  ha un' equazione cartesiana

$$(1) \quad ax+by+cz=d \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

unica a meno di un fattore  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Vicversa, l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione  
 di tale tipo è un piano.

~ . ~ . ~

$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ ,  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  piani, dunque:

Vogliamo trovare  $\pi_1 \cap \pi_2$ .

Questo equivale a risolvere il sistema lineare

$$(2) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{nelle incognite } x, y, z.$$

se lo pensiamo così  
NON si può applicare Gauss!

allora (2) sarà compatibile  $\Leftrightarrow$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} |a_1| \\ |a_2| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |b_1| \\ |b_2| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |c_1| \\ |c_2| \end{pmatrix}\right) \ni \begin{pmatrix} |d_1| \\ |d_2| \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}}_A = \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}}_{[A|D]}$$

matrice dei coeff. di (2)                      matrice completa di (2)

In generale, se  $M$  è matrice  $m \times n$ , allora  $\text{rg}(M) \leq \min\{m, n\}$

$$1 \leq \text{rg}(A) \leq 2$$

$$\text{rg}(A) \leq \text{rg}[A|D] \leq \text{rg}(A) + 1$$

↑  
SPIEGA.

$$\text{e comunque } \text{rg}[A|D] \leq 2$$

Mettendo insieme questi dati abbiamo solo i seguenti possibili casi:

| CASO | $\text{rg}(A)$ | $\text{rg}[A D]$ |
|------|----------------|------------------|
| 1    | 1              | 1                |
| 2    | 1              | 2                |
| 3    | 2              | 2                |

Analizziamoli geometricamente:

$\boxed{\text{rg}(A)=1}$  significa che  $\pi_1$  e  $\pi_2$  hanno la stessa giacitura, cioè sono paralleli.

Questo caso si spessa in due sottocasi

$\text{rg}[A|D]=1$  questo significa che le due righe di  $[A|D]$  sono proporzionali, ovvero  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_1 \cap \pi_2$ .

$\text{rg}[A|D]=2$   $\Rightarrow \pi_1 \neq \pi_2$    $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

$$\boxed{\text{rg}(A) = 2}$$

in questo caso il S.L. (2) è compatibile,  
quindi:  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ . Sia  $P \in \pi_1 \cap \pi_2$  fissato.

Allora  $\pi_1 \cap \pi_2 = P + W$  dove  $W$  è l'insieme  
di tutte le soluzioni del S.L. omogeneo associato

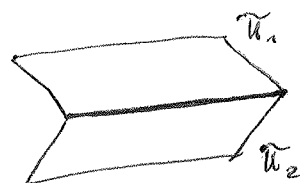
a (2):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione

# (indeterminata) -  $\text{rg}(A) = 3 - 2 = 1$ .

Quindi  $\pi_1 \cap \pi_2$  è una retta.



- È vero che ogni retta si può pensare come intersezione di due piani? (Intuitivamente dovrebbe essere abbastanza ovvio...)

Sia  $r$  una retta, e siano  $A, B$  e  $C$  due punti distinti. Sia  $C$  un terzo punto, con  $C \notin r$ . Quindi:

$A, B, C$  non sono allineati, pertanto esiste  $\pi_1$  piano passante per  $A, B, C$  e tale piano è unico.

Sia  $W$  la giacitura di  $\pi_1$ . Allora  $\pi_1 = A + W$

↑ spiegare  
rispetto

In particolare  $\overrightarrow{AB} \in W$ , e dunque

$W' = \text{Span}(\overrightarrow{AB}) \subset W$  sottospazio vettoriale. Ma  $\dim(W') = 1$ .

Per l'essenza,  $W'$  è la direzione della retta  $r$ . Quindi:

$$r = A + W' = \{A + w' \mid w' \in W'\} \subset \underbrace{\{A + w \mid w \in W\}}_{W' \subset W} = A + W = \pi_1$$

$$\underline{r \subset \pi_1}$$

Prendiamo, infine, un punto  $D$  dello spazio  $\mathbb{R}^3$  t.c.

17/11/16 (4)

$D \notin \pi_1$ . Allora  $D \notin r$ , quindi  $A, B, D$  non sono allineati. Costruiamo l'unico piano  $\pi_2$  in  $\mathbb{R}^3$  passante per  $A, B, D$ . Analogamente a quel che succedeva per  $\pi_1$ , si ha che  $r \subset \pi_2$ , quindi  $r \subset \pi_1 \cap \pi_2$ .

Se riusciamo a far vedere che  $\pi_1$  e  $\pi_2$  non sono paralleli, allora per il punto precedente  $\pi_1 \cap \pi_2$  è una retta.

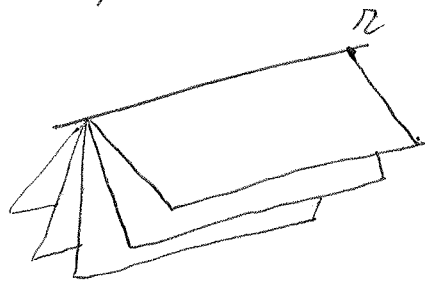
Quindi, necessariamente  $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ .

Supponiamo, per assurdo che  $\pi_1 \cap \pi_2$  siano paralleli, cioè abbiano la stessa giacitura  $W$ . Poiché  $A \in r \subset \pi_1 \cap \pi_2$  si ha

$$\pi_1 = A + W = \pi_2 \quad \text{ma } D \notin \pi_2 \text{ mentre } D \in \pi_1$$

quindi ho l'assurdo desiderato.

- Sia  $r \subset \mathbb{R}^3$  una retta. Ci sono "molti" (infiniti) piani in  $\mathbb{R}^3$  che contengono  $r$ .



Due qualsiasi d'essi, distinti, si intersecano esattamente in  $r$ .

Le loro equazioni sono, allora, equazioni cartesiane per  $r$

è chiaro che tale coppia di equazioni non è unica.

- $r \subset \mathbb{R}^3$  retta; sia  $r = \pi_1 \cap \pi_2$   $\pi_1, \pi_2$  piani distinti.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & \text{eq. di } \pi_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & \text{eq. di } \pi_2 \end{cases}$$

Le eq. cartesiane per  $r$

$\pi_1 \neq \pi_2$  e  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$   
implicano:

$$\text{rg} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2 \quad (*)$$

Siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  con  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ . Consideriamo

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z = \lambda d_1 + \mu d_2$$

È l'equazione di un piano?

L'unica cosa che potrebbe andare storta è se

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu a_2 = 0 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 = 0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La condizione (\*) ci dice che questi due vettori sono lin. indip.  
Quindi  $\lambda = \mu = 0$ , assurdo.

Allora la (3) è effettivamente l'equazione di un  
"nuovo" piano:  $\pi_3$ .

→ se  $\lambda = 0$ , allora  $\mu \neq 0$  e la (3) è un'equazione per  $\pi_2$   
se  $\mu = 0$ , allora  $\lambda \neq 0$  ————— " $\pi_1$ "

Sia  $P$  un qualsiasi punto di  $r$ , di coordinate  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

Allora

$$\underbrace{\lambda(a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1\bar{z} - d_1)}_{=0 \text{ perché } P \in r \subset \pi_1} + \underbrace{\mu(a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2\bar{z} - d_2)}_{=0 \text{ per motivi analoghi}} = ? = 0$$

Cioè: ogni punto di  $r$  è anche punto di  $\pi_3$ :  $r \subset \pi_3$

Quindi, con equazioni del tipo (3), se conosciamo  
due piani distinti passanti per la retta  $r$ , ce  
ne possiamo costruire molti altri.

●  $r, \pi_1, \pi_2$  siano come nel punto precedente

$\pi \subset \mathbb{R}^3$  piano di equazione  $\underbrace{ax+by+cz=d}_{\substack{\text{N7/11/16} \\ (a,b,c) \neq (0,0,0)}} \quad (6)$

Supponiamo  $\pi \subset \pi$ .

Vogliamo far vedere che, allora, anche  $\pi$  è del tipo (3).

Cioè si trovano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$  opportuni, tali che l'eq. (3) corrisp. è l'eq. cartesiana di  $\pi$ .

Considero il SL:

$$(4) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d \end{pmatrix}$$

L'insieme di tutte le sue soluzioni è esattamente  $\sqrt{\pi}$  la retta  $\pi$  (sp. in  $\mathbb{R}^3$ )

Quindi lo spazio vettoriale (sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ ) di tutte le soluzioni del SL omogeneo associato a (4)

ha dimensione 1. Quindi

$$\#(\text{indeterminate}) - \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}}_A = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rg}(A) = 2}}$$

Ma il SL (4) è compatibile. Dunque  $\text{rg}[A|D] = \text{rg}(A) = 2$

Le prime due righe della matrice  $[A|D]$  sono lin. indep.

per (\*). Pertanto, la terza riga è combinazione lineare delle prime due. Questo è quel che volevamo dimostrare.

- L'insieme di tutti i piani in  $\mathbb{R}^3$  passanti per una fissata retta  $r$  si chiama fascio di piani, di "sostegno" la retta  $r$ .

### ESERCIZIO

Siano  $\pi_1, \pi_2$  due piani distinti e paralleli, di equazione cartesiana rispettivamente

$$ax+by+cz=d \quad (a,b,c) \neq (0,0,0) \quad \text{e} \quad ax+by+cz=d'$$

Se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  con  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ , è vero che l'equazione

$$\lambda(ax+by+cz-d) + \mu(ax+by+cz-d') = 0$$

rappresenta sempre un piano?

Se rappresenta un piano  $\pi$ , che cos'ha in comune questi piano con  $\pi_1$  e  $\pi_2$ ?

Se sei riuscito ad arrivare fin qui, dovresti essere in grado di porti da solo la terza domanda, e rispondere.

- Analizziamo le intersezioni di tre piani  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ . Questo equivale a risolvere il SL

$$\begin{array}{l} \text{eq. di } \pi_1 \\ \text{eq. di } \pi_2 \\ \text{eq. di } \pi_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \right. \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$1 \leq \text{rg}(A) \leq 3$$

$$\text{rg}(A) \leq \text{rg}[A|D] \leq \text{rg}(A) + 1$$

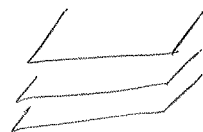
$$\text{rg}[A|D] \leq 3$$

| CASO | $\text{rg}(A)$ | $\text{rg}[A D]$ |
|------|----------------|------------------|
| 1    | 1              | 1                |
| 2    | 1              | 2                |
| 3    | 2              | 2                |
| 4    | 2              | 3                |
| 5    | 3              | 3                |

Nei primi due casi  $\text{rg}(A)=1$ , quindi i tre piani sono tutti paralleli tra loro.

Se  $\text{rg}[A|D]=1$  si ha  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$  e quindi  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1$

Se  $\text{rg}[A|D]=2$  si ha  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$



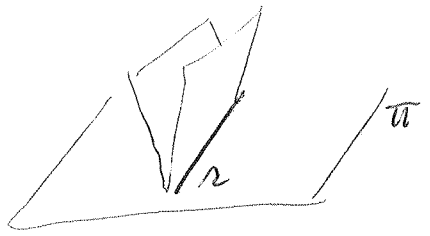
Nel caso 3 si ha  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$  è una retta, come abbiamo dimostrato in precedenza.

In realtà, negli ultimi tre casi ci sono sempre due

Sei tre piani che si intersecano lungo una retta. Adidirittura, nell'ultimo caso si ha

$\pi_1 \cap \pi_2 = \text{retta}$      $\pi_2 \cap \pi_3 = \text{retta}$      $\pi_1 \cap \pi_3 = \text{retta}$     SPIEG.

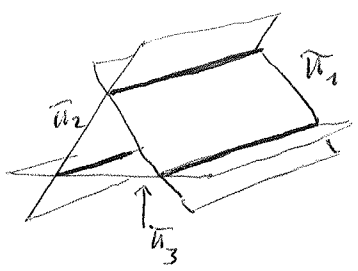
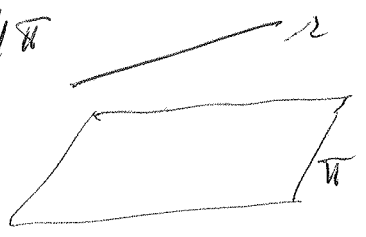
Quindi questi tre casi sono tutti i possibili casi di "retta  $\cap$  piano". Quello fatto sopra (il caso 3) è



$r \subset \pi \Rightarrow r \cap \pi = r$

Il caso 4 è interessante:  $r \cap \pi = \emptyset$ . Può essere solo

$r \parallel \pi$



Le tre rette  $\pi_i \cap \pi_j$  sono parallele.

Nell'ultimo caso  $r \cap \pi \neq \emptyset$

Il sistema lineare omogeneo associato ha solo la soluzione banale, perché  $\text{rg}(A) = 3$ . Quindi  $r \cap \pi$  è formata da un solo punto

