

ESERCIZIO (4/7/16, Es. 1, parte (1))

Nello spazio affine di dimensione 3 sono dati il punto $A(1, 3, -1)$ e la retta r di equazioni (parametriche)

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Scrivere l'equazione del piano α contenente A ed r .

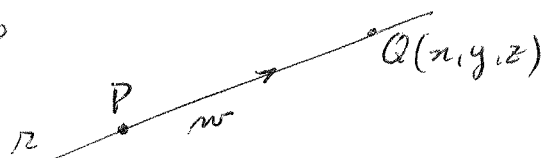
↳ forniscono: • un generatore (base) per la direzione di r ,
cioè il vettore $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (sono i coeff. di " t ")

• un punto di r : per $t=0$ trova $P(0, 0, 1)$.

Dalle eq. parametriche possiamo trovare le "cartesiane".

Facciamolo in due modi.

(A) PENSANDO



$$\overrightarrow{PQ} = \lambda w \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = \lambda w = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{cases} \frac{x-0}{2} = \lambda = \frac{y-0}{1} \\ \frac{x-0}{2} = \lambda = \frac{z-1}{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = y \\ -x = z-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$$

Un modo tradizionale di scrivere è $\boxed{\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}} \quad (1)$
 Noti P e w , si scrive subito $\longrightarrow$

(B) CALCOLANDO: dalla seconda delle eq. parametriche mi ricavo t , che vado poi a sostituire nelle altre due:

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione del generico piano di $\mathbb{R}^3$ contenente r è (SPLUG):

$$\lambda(x-2y) + \mu(y+z-1) = 0 \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Impongo a quest'equazione di passare per il punto A, cioè: le coordinate di A devono soddisfare tale relazione.

Questo fornisce λ e μ :

$$\lambda(1-2 \cdot 3) + \mu(3-1-1) = 0 \Rightarrow -5\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \mu = 5$$

$$1(x-2y) + 5(y+z-1) = 0 \quad \boxed{x + 3y + 5z - 5 = 0}$$

è l'equazione di α .

Posso imporre altre condizioni ad un piano passante per la retta r . Per esempio, quella di essere parallelo all'asse z .

La direzione dell'asse z è generata da $e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

La giacitura di un piano per r è l'insieme di tutte le soluzioni del SL omogeneo associato alla (2), cioè di:

$$\lambda x + (-2\lambda + \mu)y + \mu z = 0$$

$\alpha \parallel \text{asse } z \Leftrightarrow e_3 \text{ sarà soluzione di}$

Sostituisco le componenti di e_3 in tale equazione:

$$\lambda \cdot 0 + (-2\lambda + \mu) \cdot 0 + \mu \cdot 1 = 0 \quad \underline{\underline{\mu = 0}} \Rightarrow \lambda \neq 0$$

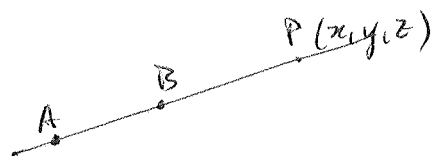
(λ, μ) sono definiti solo a meno di un fattore di proporz. non nullo. Dunque è lecito porre: $\lambda = 1$.

Il piano cercato è

$$\boxed{x - 2y = 0}$$

Se vogliamo scrivere equazioni cartesiane per la retta passante per due punti, la (1) è il metodo più veloce.

Dare equazioni cartesiane per la retta passante per i punti: $A(1, 3, -1)$ e $B(4, -2, -3)$



$$(3) \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{-2}$$

$$P-A = \vec{AP}$$

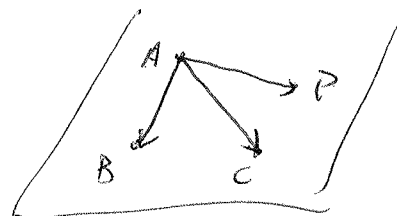
da cui si ricava, ad esempio

$$\frac{x-1}{3} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow -2(x-1) = 3(z+1) \quad \underline{2x+3z = -1}$$

In modo analogo si ricava un'altra equazione

Dalle (3) si ricavano le equazioni di tre piani passanti per la retta AB.

È utile avere a disposizione anche un modo rapido per scrivere l'equazione di un piano passante per tre punti non allineati.



Un punto $P(x, y, z)$ appartenga a tale piano $\Leftrightarrow$ i tre vettori $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}$ sono lin. dip.

ESEMPIO

Trovare l'equazione del piano β passante per i punti $A(2, 7, 3)$, $B(1, 0, -2)$, $C(-2, -3, 4)$.

$\vec{AP}$	$x-2$	$y-7$	$z-3$	$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{ saranno lin. dipendenti } \Leftrightarrow$
$\vec{AB}$	-1	-7	-5	
$\vec{AC}$	-4	-10	1	

$$\det \begin{vmatrix} x-2 & y-7 & z-3 \\ -1 & -7 & -5 \\ -4 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-7 & z-3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & y-7 \\ 1 & 7 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$-7(x-2) + 20(y-7) + 10(z-3) - 28(z-3) - 50(x-2) + (y-7) = 0$$

Nello spazio affine di dimensione tre in cui è fissato un riferimento cartesiano, sono date le rette r, s di equazioni cartesiane

$$5) \quad r \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases} \quad s \begin{cases} x-2y+6z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \end{cases}$$

- (1) Trovare vettori direzione ed equazioni parametriche per r ed s ;
- (2) verificare che le due rette sono incidenti;
- (3) scrivere un'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

La direzione di r è l'insieme delle soluzioni del SL omogeneo associato a (5):

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad \boxed{y=-1} \Rightarrow \boxed{x=4} \quad \boxed{z=-3}$$

La direzione di r è generata dal vettore $\underline{\underline{w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}}$

Cerco un punto di r . Nel sistema lin. (5) pongo $z=0$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ -8 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ \frac{8}{3} \end{vmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{vmatrix} \quad \text{Il punto cercato è } P\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)$$

Allora equazioni parametriche per r sono date da

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3} + 4t \\ y = \frac{8}{3} - t \\ z = -3t \end{cases}$$

ALLORO: fase d'analisi per la retta s

(2) Dobbiamo far vedere che $ROS \neq \emptyset$
 ROS è l'insieme delle soluzioni del SL:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x - 2y + 6z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \end{cases} \quad \text{quattro equazioni, tre incognite}$$

(6) La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) \leq 3$$

calcoliamo:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} \quad \underline{rg(A) = 3}$$

Che significa $rg(A) = 3$, il massimo possibile?

Sappiamo già che le prime due righe di A sono lin. indep. (SPREG.), dunque $rg(A) \geq 2$. Se avessimo trovato $rg(A) = 2$, questo vorrebbe dire che le due rette r, s avrebbero la stessa direzione.

Quindi, $rg(A) = 3 \Rightarrow r, s$ hanno direzioni distinte.

Per completare l'esercizio dobbiamo studiare la matrice completa $|A|D|$ $3 = rg(A) \leq rg|A|D| \leq 4$

Se $rg|A|D| = 4$ allora $ROS = \emptyset$. Quindi, risolvere l'esercizio equivale a verificare che $rg|A|D| < 4$, cioè che $\det|A|D| = 0$

conviene (forse...) rifare su $|A|D|$ le op. dem sulle righe, fatte sopra su A

$$\det|A|D| = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -5 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{SPREG.}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

con Sarrus si vede subito che quest determinante è 0.

Quindi $ROS \neq \emptyset$. Ora, le prime tre righe di A sono lin. indep.

21/11/16

(6)

Per risolvere il S.L. (6) è suff. risolvere il SL dato dalle prime tre equazioni di (6). Sia B la m. 3×3 formata dalle prime tre righe di A . Allora $\det(B) \neq 0$, dunque (6) ha un'unica soluzione: $\text{RHS} = \{P\}$. Troviamola:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} \quad B^{-1} = ? \quad |B| \ I_3 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{vmatrix} I_3 & \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$= B^{-1}$

Provate a calcolare B^{-1} per conto vostro e fate il controllo.

Un'altra via per calcolare B^{-1} :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 4 + 1 + 6 - 12 = -12$$

Calcolo la matrice dei cofattori di B :

$$C = \begin{vmatrix} B_{11}^+ & B_{12}^- & B_{13}^+ \\ B_{21}^- & B_{22}^+ & B_{23}^- \\ B_{31}^+ & B_{32}^- & B_{33}^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & -3 \\ -8 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad {}^t C = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 4 \\ -9 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

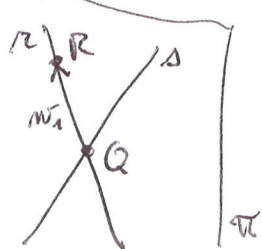
$$B^{-1} = \frac{1}{-12} {}^t C = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

ricordarsi dei segni!

$$B \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = B^{-1} \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Dunque, l'unico punto comune a red e s è $Q(1, 3, 1)$

Resta da trovare l'equazione del piano che contiene red e s



Possiamo trovare un altro punto di red considerando:

$$Q + w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} = R$$

Per trovare il piano passante per la retta s :

$$\lambda(x-2y+6z-1) + \mu(3x-y-2z+2) = 0 \quad \leftarrow (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

ed imporgli il passaggio per il punto R :

$$\lambda(5-2 \cdot 2+6(-2)-1) + \mu(3 \cdot 5-2(-2)-2(-2)+2) = 0$$

$$\lambda(5-4-12-1) + \mu(15+4) = 0$$

$$-12\lambda + 19\mu = 0$$

$$\lambda = 19 \quad \mu = 12$$

sostituire

$$19x - 38y + 114z - 19 + 36x - 12y - 24z + 24 = 0$$

$$55x - 50y + 90z + 5 = 0$$

$$\boxed{11x - 10y + 18z = -1} \quad \pi$$

~~~~~

$r, s \subset \mathbb{R}^3$  rette.

Qual'è la "posizione reciproca" tra di loro.

Si tratta di studiare  $r \cap s$ .

Come abbiamo visto, da un punto di vista algebrico questo equivale a risolvere un sistema lineare di 4 equazioni in 3 incognite

$$AX = D \quad A \quad 4 \times 3 \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad D \quad 4 \times 1 \quad |A|D| \quad 4 \times 4$$

| $\text{rg}(A)$ | $\text{rg}( A D )$ |                                                                                  |
|----------------|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 2              | 2                  | $\leftarrow R = s$                                                               |
| 2              | 3                  | $\leftarrow R \cap s = \emptyset$ e $R \parallel s \Leftrightarrow \text{SPERG}$ |
| 3              | 3                  | $\leftarrow R \cap s = \{P\}$                                                    |
| 3              | 4                  | $\leftarrow R \cap s = \emptyset$ e $R \nparallel s$                             |

$\begin{matrix} R \\ \diagdown \\ P \end{matrix}$

$R, s$  : rette incidenti

$R \cap s = \emptyset$  e  $R \nparallel s$   $R, s$  si dicono R. sghembe