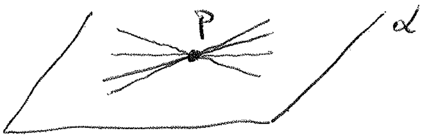
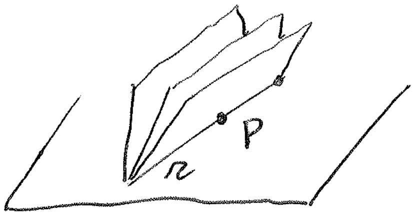
LEZIONE 33 22/11/16 (1)

ESERCIZIO "CONTENUTA NEL"

Dare equazioni cartesiane per la generica retta "sul" piano α di equazione $x+y-z=0$, passante per il punto $P(1,1,1)$.

Le coordinate di P soddisfano l'equazione di α, dunque $P \in \alpha$



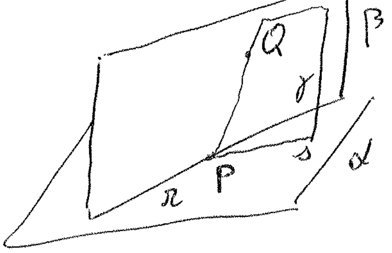


L'equazione (cartesiana) di α è una delle due equazioni richieste.

Ciascuna delle due equazioni cart. di una retta r rappresenta un piano appartenente al fascio di piani passanti per r

Sarebbe ottimale avere un modo per scegliere in tale fascio un unico piano, che sia sicuramente diverso da α.

Se Q è un punto $\notin \alpha$, basta imporre che il piano β cercato passi per Q. Dunque β deve passare per la retta r e passare per Q. Se r cambia, cambierà anche β: sia γ.



Ma posso tenere fisso che tale piano passi per Q

$\alpha \cap \gamma = s$ con s retta per P. SPIEG.

Dunque i piani che ci vanno bene passano sia per P che per Q; cioè contengono la retta PQ!
Cioè sono piani appartenenti al fascio di sostegno la retta PQ SPIEG.

Viceversa, sia δ un piano contenente la retta PQ.

Chi è $\alpha \cap \delta$? $P \in \alpha \cap \delta \Rightarrow \alpha \cap \delta \neq \emptyset$.
$Q \in \delta$ ma $Q \notin \alpha \Rightarrow \alpha \neq \delta$ $\Big\} \Rightarrow \alpha, \delta$ non sono paralleli

eq. di α $\quad \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ $\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$

eq. di δ $\quad (a',b',c')\neq 0_{\mathbb{R}^3}$

α,δ non paralleli $\Rightarrow rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=2$ SPIEG.

Sia $W\subset\mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale formato da tutte le soluzioni di (Si. omogeneo, associato a $\;$) SPIEG.

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$$

$\dim(W)=\#(\text{indeterminate})-rg(A)=$

$=3-2=1$

Quindi $\alpha\cap\delta$ è una retta, contenuta in α e passante per P.

Cerco un punto $Q\notin\alpha$ per esempio $Q(3,0,0)$.

Cerco equazioni cartesiane per la retta PQ:

$\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,1,1)-(3,0,0)=(-2,1,1)$ o $\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ $\quad \frac{x-3}{-2}=y \quad x-3=-2y$

$y=z$

PQ $\rightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

generico piano passante per la retta PQ : $\begin{cases} \lambda(x+2y-3)+\mu(y-z)=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ $\quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$

piano α

sono le equazioni che cerchiamo!

ESERCIZIO

Scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per il punto $P(2,-1,1)$, e contenente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

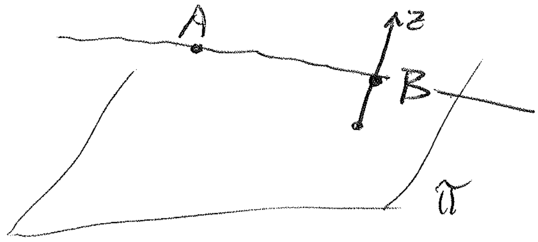
Dare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per $A(1,1,4)$, parallela al piano π di equazione $x+y-2z+1=0$, ed incidente l'asse z.

Capire (un po'...) la situazione.

$A \notin \pi$

Equazioni cartesiane per l'asse z sono $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Quindi A non è un punto dell'asse z. Inoltre l'asse z interseca π in $(0,0,\frac{1}{2})$.



Cerchiamo una retta.
Il modo più semplice per individuare una retta si ha quando si conoscono due suoi punti.
Il PBL ce li dà, in un certo senso: A, ed un punto dell'asse z, chiamiamolo $B(0,0,a)$; $a \in \mathbb{R}$ è da determinare!

L'ultima condizione che richiede il PBL è che la retta AB sia $\parallel \pi$. Questo equivale al fatto che il vettore $\vec{AB} = B - A = (0,0,a)-(1,1,4) = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ a-4 \end{vmatrix}$ appartiene alla giacitura di π

La giacitura di π è l'insieme W di tutte le sol. del SL omogeneo

$$x+y-2z=0$$

$\leftarrow$ è uno spazio vett., sottosp. di $\mathbb{R}^3$, $\dim(W)=2$

(associato all'equazione $x+y-2z\underbrace{+1}_{=-1}=0$ di π)

Quindi

$$-1-1-2(a-4)=0 \qquad \cancel{2}+\cancel{2}(a-4)=0 \qquad 1+a-4=0$$

$\Rightarrow a=3$ e $\underline{B(0,0,3)}$ è il punto giusto

La retta per $A(1,1,4)$ e $B(0,0,3)$ ha direzione generata dal vettore $\overrightarrow{BA} = A - B = \begin{vmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 4-3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}}_{=:w}$. Quindi è la retta

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-3}{1} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad \text{eq. cartesiane}$$

Equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = \overset{B}{0} + t \cdot \overset{w}{1} = t \\ y = 0 + t \cdot 1 = t \\ z = 3 + t \cdot 1 = 3 + t \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO</u> Si determini se esiste una retta $r \subset \mathbb{R}^3$ passante per il punto $P(1,1,1)$, ed incidente entrambe le rette

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad s': \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

<u>Se esiste, se ne diano equazioni.</u>

Cerchiamo di capire la situazione geometrica.

- $P \in s$?

  Se fosse $P \in s$, allora $\begin{cases} \overset{P}{1} = t \\ 1 = 2 + t \\ 1 = \end{cases}$ assurdo <u>SPIEGA.</u>

  Quindi <u>$P \notin s$</u>

- $P \in s'$?

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = -t \Rightarrow t = -1 \\ 1 = 1 + t \Rightarrow t = 0 \end{cases} \text{ assurdo} \qquad \text{Dunque } \underline{P \notin s'}$$

- Come sono tra di loro le rette s, s' ?

  La direzione di s è generata dal vettore $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = w$

La direzione di s' è gen. da $w' = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$

w, w' sono lin. indip., dunque <u>s, s' non sono parallele</u>

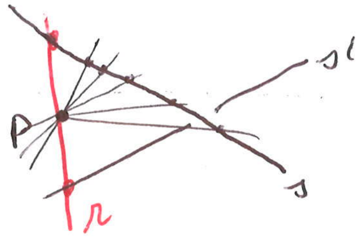
• $s \cap s' = ?$

Supponiamo $s \cap s' \neq \emptyset$. SPIEGARE!
Allora esistono $t \in \mathbb{R}$ e $\tau \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} t = 1 \\ 2+t = -\tau \\ 1+2t = 1+\tau \end{cases} \Rightarrow \tau = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3 = -\tau \Rightarrow \tau = -3 \\ 3 = 1+\tau \Rightarrow \tau = 2 \end{cases} \quad \text{assurdo.}$$

Dunque <u>$s \cap s' = \emptyset$</u>

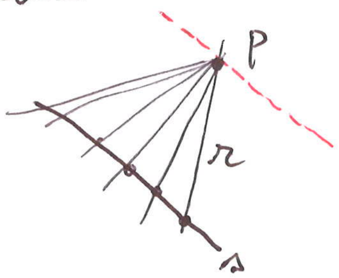
s, s' sono <u>sghembe</u> tra di loro



Supponiamo esista la retta r che cerchiamo.

Si potrebbe cercare di risolvere l'esercizio come il precedente SPIEGARE!

Altra via:



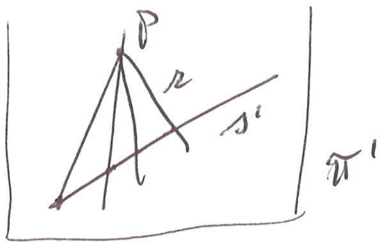
Le rette passanti per P ed incidenti la retta s ($P \notin s$) quasi riempiono un piano. "Manca" la retta per P parallela ad s.
Chiamo π il piano per P ed s

DOPO!

Potrebbe benissimo capitare che $\pi \cap s' = \emptyset$, cioè π ed s' sono paralleli. In tal caso la retta r <u>non</u> esiste. Supponiamo che non sia questo il caso.

La retta r che cerchiamo è una di quelle del fascio di rette su π, di centro P. Comunque: <u>$r \subset \pi$</u>.

Ma anche



Quindi, se r esiste, allora deve (dovrebbe ...) essere $r = \pi \cap \pi'$.

Se troviamo i piani π e π' siamo a posto!
Un piccolo intoppo è che s, s' sono date mediante eq. parametriche. Ma:

$$s \quad \begin{cases} \boxed{x = t} \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y+2=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$$ eq. cartesiane per s

$\lambda(x-y+2)+\mu(2x-z+1)=0$ $\quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$ generico piano per s

Impongo il passaggio per P:

$\lambda(1-1+2)+\mu(2\cdot 1-1+1) = 2\lambda+2\mu=0 \qquad \lambda=1 \quad \mu=-1$

$x-y+2-2x+z-1=0 \qquad -x-y+z+1=0$

$\pi \quad x+y-z-1=0$

Analogamente:

$$s' \quad \begin{cases} x = 1 \leftarrow \text{già eq. cartesiana} \\ y = -t \qquad t=-y \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow y+z-1=0 \qquad \begin{cases} x-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$$ eq. cart. per s'

$\lambda(x-1)+\mu(y+z-1)=0$ $\quad$ Impongo il passaggio per P

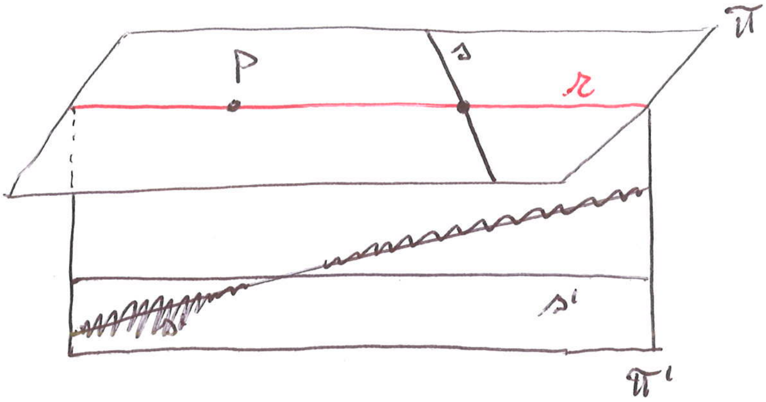
$\lambda(1-1)+\mu(1+1-1)=0 \Longrightarrow \mu=0$

$\pi' \quad x-1=0$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x=1 \end{cases}$$ sono equazioni cartesiane per una retta: r $\quad P\in r$ è facile

Verificare che $r\cap s\neq\emptyset \qquad r\cap s'\neq\emptyset$

Potrebbe accadere



$s' \parallel \pi$ quindi il nostro problema non ha soluzione.

Si noti, infatti, che π, π' esistono

$\pi \cap \pi'$ è una retta: r

$r \cap s \neq \emptyset$ ma $r \cap s' = \emptyset$

ESERCIZIO $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{C}^2$ $(x, y) \in \mathbb{C}^2$

Vi sono punti (x_0, y_0) sulla retta $r \subset \mathbb{C}^2$, di equazione cartesiana

$$(3+2i)x - (1-3i)y + 4 = 0$$

le cui coordinate sono entrambe reali? Cioè $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che esistano di questi punti. Essendo punti di r si ha che

$(3+2i)x_0 - (1-3i)y_0 + 4 = 0$ è verificata.

Ma allora anche

$\overline{(3+2i)x_0 - (1-3i)y_0 + 4} = \overline{0}$ è verificata, cioè ($\underline{x_0, y_0 \in \mathbb{R}}$)

$(3-2i)x_0 - (1+3i)y_0 + 4 = 0$ è verif.

Allora gli eventuali punti cercati sono in $r \cap \bar{r}$, dove $\bar{r} \subset \mathbb{C}^2$ è la retta di equazione cartesiana:

$$(3-2i)x - (1+3i)y + 4 = 0$$

$$\begin{cases} (3+2i)x + (-1+3i)y = -4 \\ (3-2i)x + (-1-3i)y = -4 \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 3+2i & -1+3i \\ 3-2i & -1-3i \end{vmatrix}$$

$A^{-1} = ?$

$$\det(A) = (3+2i)(-1-3i) - (-1+3i)(3-2i) =$$
$$= \cancel{-3} - 9i - 2i \cancel{+6} \cancel{+3} - 2i - 9i \cancel{-6} = -22i$$

Calcolo la matrice dei cofattori:

$$C = \begin{vmatrix} -1-3i & -3+2i \\ 1-3i & 3+2i \end{vmatrix} \qquad {}^tC = \begin{vmatrix} -1-3i & 1-3i \\ -3+2i & 3+2i \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^tC = \underbrace{\frac{i}{22}}_{\text{SPIEGA}}\,{}^tC = \begin{vmatrix} +\frac{3}{22} - \frac{i}{22} & \frac{3}{22} + \frac{i}{22} \\ -\frac{1}{11} - \frac{3}{22}i & -\frac{1}{11} + \frac{3}{22}i \end{vmatrix}$$

Controllo

$$\begin{vmatrix} 3+2i & -1+3i \\ 3-2i & -1-3i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{3-i}{22} & \frac{3+i}{22} \\ \frac{-2-3i}{22} & \frac{-2+3i}{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & \end{vmatrix}$$

$$(3+2i)(3-i) = 9 - 3i + 6i + 2 = 11 + 3i$$
$$(-1+3i)(-2-3i) = 2 + 3i - 6i + 9 = 11 - 3i$$

$$(3+2i)(3+i) = 9 + 3i + 6i - 2 = 7 + 9i$$
$$(-1+3i)(-2+3i) = 2 - 3i - 6i - 9 = -7 - 9i$$

$$\frac{-6+2i-6-2i}{11} = -\frac{12}{11} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = A^{-1} \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3-i}{22} & \frac{3+i}{22} \\ \frac{-2-3i}{22} & \frac{-2+3i}{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-2(3-i)}{11} + \frac{-2(3+i)}{11} \\ \end{vmatrix}$$