LEZIONE 34 PRODOTTI SCALARI 23/11/16 (1)

Abbiamo bisogno di un metodo che permetta di assegnare una "distanza" tra due punti di $\mathbb{R}^n$, ed un "angolo" tra due direzioni. Tale metodo è fornito dal seguente concetto:

<u>Def.</u> Un <u>prodotto scalare</u> su $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$$

1° argomento, 2° argomento

SPIEGARE

con le seguenti proprietà:

1. <u>BILINEARITÀ</u> $\langle\ ,\ \rangle$ è lineare in ciascun argomento

cioè

$\langle u+u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle \quad \forall u, u', v \in \mathbb{R}^n$

$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\langle u, v+v'\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v'\rangle \quad \forall u, v, v' \in \mathbb{R}^n$

$\langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

Le prime due relazioni si possono pensare così:
<u>fisso</u> un arbitrario $v \in \mathbb{R}^n$, e lo uso costantemente come 2° argomento. Allora ho un'applicazione

$\langle -, v\rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (sono libero di dare solo il 1° argom.)

Le prime due relazioni mi dicono che $\langle -, v\rangle$ è lineare ("$\mathbb{R}$" può essere pensato come spazio vettoriale, di dim = 1).

Analogamente, le ultime due relazioni mi dicono che $\langle u, -\rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è applicazione lineare, comunque sia stato <u>fissato</u> $u \in \mathbb{R}^n$.

Da questo modo di vedere le cose discende il nome BI-LINEARITÀ di questa proprietà.

2. SIMMETRIA

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ per ogni $u,v\in\mathbb{R}^n$

3. $\langle -,-\rangle$ è DEFINITO POSITIVO

$\langle u,u\rangle \geq 0$ per ogni $u\in\mathbb{R}^n$, e: $\langle u,u\rangle = 0 \iff u=0$

NMB!!! (Nota MOLTO Bene)

OSS. Come vedremo, può benissimo capitare che $\langle u,v\rangle \underline{<0}$ per certi $u,v\in\mathbb{R}^n$.

ESEMPIO Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come matrici colonna:
$u,v\in\mathbb{R}^n$

$$u=\begin{vmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{vmatrix} \qquad v=\begin{vmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{vmatrix}$$

Poniamo

$$\langle u,v\rangle_{\underbrace{st}_{\text{"STANDARD"}}} \overset{def}{=} \underbrace{{}^t u\, v}_{\substack{\text{prodotto}\\ \text{r. per c.}}} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{vmatrix} = u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$$

Otteniamo così un'applicazione $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ che è un prodotto scalare: il cosiddetto <u>prodotto scalare standard</u> di $\mathbb{R}^n$. Le proprietà 2. e 3. sono chiare. La 1. segue dalle proprietà del prodotto righe per colonne.

Def. Se $\langle\ ,\ \rangle$ è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, diremo che $u,v\in\mathbb{R}^n$ sono <u>ORTOGONALI</u> tra loro (<u>rispetto $\langle\ ,\ \rangle$</u>) se $\langle u,v\rangle = 0$. Indicheremo tale fatto con $\underline{u\perp v}$.
è un concetto relativo

Per esempio, se $e_1,\dots,e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora si ha: $i\neq j \Rightarrow \langle e_i,e_j\rangle_{st}=0$. Cioè, tali vettori sono due a due ortogonali rispetto al prodotto scalare standard

Supponiamo sempre che sia fissato un prodotto scalare $\langle -,- \rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

Def. Per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ chiameremo NORMA di u (rispetto $\langle -,- \rangle$) il numero reale $\|u\| \overset{def}{=} +\sqrt{\langle u,u \rangle}$ $\qquad \|u\| = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$

È possibile estrarre la $\sqrt{\ }$ di $\langle u,u \rangle$ perché $\langle u,u \rangle \geq 0$ per la proprietà di $\langle , \rangle$ di essere definito positivo.
QUI è il primo punto in tutto il corso in cui uso una proprietà peculiare di $\mathbb{R}$: l'esistenza della $\sqrt{\ }$ di un numero reale ≥ 0. Per esempio, se penso 2 come numero razionale ($\in \mathbb{Q}$) non esiste $a \in \mathbb{Q}$ tale che $a^2 = 2$.
Ma esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $b^2 = 2$.

Se riconsideriamo l'esempio del pr. scal. standard in $\mathbb{R}^n$, allora $\|e_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|v\| = 1$ si dice VERSORE (risp. ...)

$u \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda u\| = ?$

$$\|\lambda u\| = +\sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = +\sqrt{\lambda^2 \langle u,u \rangle} = \underbrace{+\sqrt{\lambda^2}}_{\geq 0} \sqrt{\langle u,u \rangle} = |\lambda| \, \|u\|$$

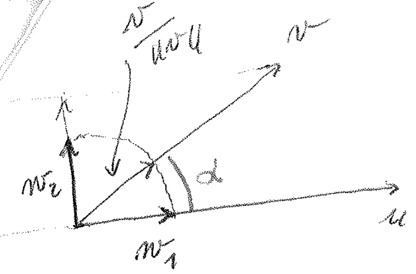
$\longrightarrow$ devo usare $|\ |$

$u \in \mathbb{R}^n \quad u \neq 0 \implies \|u\| > 0 \quad \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1$

quindi $\frac{u}{\|u\|}$ è un versore.

ESEMPIO $\mathbb{R}^3 \quad \langle -,- \rangle_{st}$.
Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti. Vogliamo trovare un modo "intrinseco" di calcolare $\langle u,v \rangle_{st}$.

$u \neq 0 \implies v_1 \overset{def}{=} \frac{u}{\|u\|}$ è un versore $\qquad \boxed{u = \|u\| \, v_1}$



ESERCIZIO

w_1, v sono ancora lin. indip.

(spiegarlo "graficamente")

Cerchiamo, adesso, $a \in \mathbb{R}$ tale che $(a w_1 + v) \perp w_1$.

Per questo deve essere

$\langle a w_1 + v, w_1 \rangle = 0$

$$0 = \langle a w_1, w_1 \rangle + \langle v, w_1 \rangle = a \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{>0} + \langle v, w_1 \rangle$$

$$a = -\frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

Quindi $v' \overset{def}{=} -\frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + v \perp w_1$

Definiamo $w_2 \overset{def}{=} \frac{v'}{\|v'\|}$ altro versore, con $w_1 \perp w_2$

$v \in Span(w_1, w_2)$ Vogliamo esplicitare v come combinazione lineare di w_1 e w_2.

$\frac{v}{\|v\|}$ è un versore. Un momento di riflessione ci mostra

che $\frac{v}{\|v\|} \overset{\text{"circonf. goniometrica"}}{=} \cos(\alpha) w_1 + sen(\alpha) w_2$ da cui

$$\boxed{v = \|v\| \cos(\alpha) w_1 + \|v\| sen(\alpha) w_2}$$

Vedremo tra un momento come sia possibile determinare un terzo versore $w_3 \in \mathbb{R}^3$ perpendicolare sia a w_1, che a w_2. Le proprietà di w_1, w_2, w_3 si possono riassumere così:

$\|w_1\| = \|w_2\| = \|w_3\| = 1 \Rightarrow \langle w_1, w_1 \rangle_{st} = 1 \quad \langle w_2, w_2 \rangle_{st} = 1 \quad \langle w_3, w_3 \rangle_{st} = 1$

$i \neq j \Rightarrow w_i \perp w_j \Leftrightarrow \langle w_i, w_j \rangle_{st} = 0$

Vediamo come da tali proprietà segua che

w_1, w_2, w_3 sono lin. indipendenti, dunque una base di $\mathbb{R}^3$.

Sia $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Dobbiamo provare che $\alpha = \beta = \gamma = 0_{\mathbb{R}}$. Verifichiamo che $\alpha = 0$:

$\langle \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3, w_1 \rangle = \langle 0_{\mathbb{R}^3}, w_1 \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

$\parallel$ bilin.

$\alpha \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{=1} + \beta \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle}_{=0} + \gamma \underbrace{\langle w_1, w_3 \rangle}_{=0} = \alpha$ $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$

Analogamente si vede che $\beta = \gamma = 0$.

Che cosa c'è di buono per noi nel fatto che w_1, w_2, w_3 sia una base di $\mathbb{R}^3$ per cui valgono le $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$?

(L'ESEMPIO sta continuando)

$t, t' \in \mathbb{R}^3$ arbitrari $t = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$ $t' = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots$

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $\forall i, \forall j$.

$$\langle t, t' \rangle_{st} = \langle a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3, t' \rangle_{st} \overset{B-LIN}{=}$$

$$= a_1 \langle w_1, t' \rangle_{st} + a_2 \langle w_2, t' \rangle_{st} + a_3 \langle w_3, t' \rangle_{st} =$$

$$= a_1 \langle w_1, b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \rangle + \text{analoghe} \overset{B-LIN}{=}$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle_{st}}_{=1} + \cancel{a_1 b_2 \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle_{st}}_{=0}} + \cancel{a_1 b_3 \underbrace{\langle w_1, w_3 \rangle_{st}}_{=0}} +$$

$$+ \cancel{a_2 b_1 \langle w_2, w_1 \rangle_{st}} + a_2 b_2 \underbrace{\langle w_2, w_2 \rangle_{st}}_{=1} + \cancel{a_2 b_3 \langle w_2, w_3 \rangle_{st}} +$$

$$+ \cancel{a_3 b_1 \langle w_3, w_1 \rangle_{st}} + \cancel{a_3 b_2 \langle w_3, w_2 \rangle_{st}} + a_3 b_3 \underbrace{\langle w_3, w_3 \rangle_{st}}_{=1}$$

$$= \underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Infine:

$$\langle u, v \rangle_{st} = \langle \|u\| w_1, \|v\| \cos(\alpha) w_1 + \|v\| \operatorname{sen}(\alpha) w_2 \rangle_{st} = \ldots$$

$$= \underline{\|u\| \cdot \|v\| \cos(\alpha)}$$ importante anche in Fisica!

Da questa segue subito che $90° < \alpha < 180° \Rightarrow \langle u, v \rangle_{st} < 0$

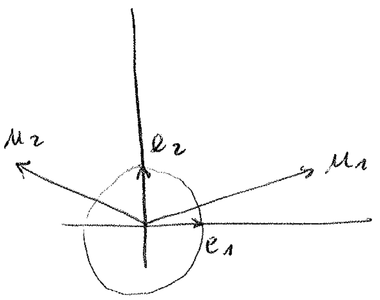
Ci siamo espressi nelle pagine precedenti in un modo che presuppone che su uno stesso $\mathbb{R}^n$ ci possano essere diversi prodotti scalari. È effettivamente così, vediamolo con un

ESEMPIO

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo due vettori linearmente indipendenti u_1, u_2 tali che

$$\langle u_1, u_2\rangle_{st} \neq 0 \qquad \|u_1\|_{st} \neq 1 \qquad \|u_2\|_{st} \neq 1$$

(provate a costruire effettivamente una tale coppia di vettori).



u_1, u_2 è una base di $\mathbb{R}^2$

Presi $v, w \in \mathbb{R}^2$ arbitrari, se

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \qquad w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$

$(\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad \forall i, \forall j)$, poniamo

$$\langle v, w\rangle \overset{def}{=} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{vmatrix}$$

$\langle -,-\rangle$ così definito è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$, cioè è bilineare, simmetrico, definito positivo.

$\langle u_1, u_1\rangle = \begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix} = 1 \implies \|u_1\| = 1$ (risp. a $\langle -,-\rangle$, NON risp. a $\langle -,-\rangle_{st}$!)

$\langle u_1, u_2\rangle = \begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix} = 0 \qquad u_1 \perp u_2$ risp. $\langle -,-\rangle$

Si verifica che anche u_2 è un versore. Nessuno di questi tre fatti accade risp. a $\langle -,-\rangle_{st}$. ~~Basta~~ Basterebbe uno di questi per concludere che

$$\langle -,-\rangle \neq \langle -,-\rangle_{st}$$

$\langle -, - \rangle$ sia un prod. scalare fissato in $\mathbb{R}^n$ 23/11/16

$E \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme. Definiamo

$E^\perp \overset{def}{=} \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in E \}$ "E ortogonale"

$E^\perp$ è sottospazio vettoriale ~~[illegible]~~ di $\mathbb{R}^n$

Dim. $\langle 0_{\mathbb{R}^n}, w \rangle = 0 \quad \forall w \in E \implies 0_{\mathbb{R}^n} \in E^\perp$

Se $v, v' \in E^\perp$ allora $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle =$

$= 0 + 0 = 0 \quad \forall w \in E$. Dunque $v + v' \in E^\perp$.

Infine, se $v \in E^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ sono arbitrari, allora

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall w \in E \implies \lambda v \in E^\perp$.

■

Ci interesserà, in particolare, il caso in cui $\overset{= \mathbb{W}}{E}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. In tal caso è importante trovare una relazione tra le dimensioni di $\mathbb{W}$ e di $\mathbb{W}^\perp$. La vedremo.

Completiamo il "grosso" esempio con la costruzione di un versore w_3, ortogonale sia a w_1 che a w_2.

Sia $w_1 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ $\quad w_2 = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ cioè: quelle scritte sono le componenti di w_1, w_2 risp. alla base canonica.

Sia $u = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ arbitrario. Allora

$u \perp w_1 \iff \langle u, w_1 \rangle_{st} = 0 \iff a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$

$u \perp w_2 \iff \quad - - - \quad b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$

$u \perp$ ad entrambi $w_1, w_2 \iff (x, y, z)$ è una soluzione del SL omogeneo

$$(*) \quad \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

w_1, w_2 lin. indip $\Longleftrightarrow rg\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2$

Se $U \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme di tutte le soluzioni di (*), allora U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, di dimensione:

$$\dim(U) = 3 - rg\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Sia $w \in U$, $w \neq 0$ qualsiasi. Allora $w_3 \stackrel{def}{=} \frac{w}{\|w\|}$ è il versore cercato.