

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  sia un fissato prodotto scalare su  $\mathbb{R}^n$ . Commentare

$v_1, \dots, v_t \in \mathbb{R}^n$  vettori  $\neq 0$ , a due a due ortogonali:  
 $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$ . Allora  $v_1, \dots, v_t$  son linearmente indip.

Dim.

$a_1, \dots, a_t \in \mathbb{R}$  siano t.c.  $a_1 v_1 + \dots + a_t v_t = 0$ . Allora

$$0 = \langle 0, v_1 \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_t v_t, v_1 \rangle = a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{>0} + a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \dots$$

$\Rightarrow a_1 = 0$ . Analogamente si prova che tutti gli altri  $a_i$  son nulli. ■

Def. Una base di  $\mathbb{R}^n$  è detta ortogonale se è formata da vettori a due a due ortogonali. È detta ortonormale (ON) se, inoltre, è tutta formata da versori.

$$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n \text{ formano una base ON} \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Basi ON esistono sempre. Esponemmo adesso un procedimento che permette di costruire una base ON a partire da una base arbitraria.

### PROC. DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT.

Siano  $u_1, \dots, u_t \in \mathbb{R}^n$  vettori linearmente indipendenti.

Allora esistono versori  $v_1, \dots, v_t \in \mathbb{R}^n$ , a due a due ortogonali.

e t.c.  $\text{Span}(u_1, \dots, u_r) = \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \quad \forall r = 1, \dots, t$ .

Dim.

Per induzione su  $n$ .

**[t=1]** Basta prendere  $v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$  ( $u_1 \neq 0$  per l'indipendenza).

Passo induttivo: sia  $t > 1$ , e la proprietà sia vera per  $r \leq t-1$ .

Dunque esistono versori  $v_1, \dots, v_{t-1}$ , a due a due ortog. t.c.

$$\text{Span}(u_1, \dots, u_t) = \text{Span}(v_1, \dots, v_t) \quad \forall t \leq t.$$

Esister  $\lambda_1, \dots, \lambda_{t-1} \in \mathbb{R}$  tali che si abbia

$$\langle u_t + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{t-1} v_{t-1}, v_h \rangle = 0 \quad \forall h=1, \dots, t-1$$

$$\langle u_t, v_h \rangle + \sum_{j=1}^{t-1} \langle \lambda_j v_j, v_h \rangle = \langle u_t, v_h \rangle + \lambda_h \underbrace{\langle v_h, v_h \rangle}_{=1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_h = -\langle u_t, v_h \rangle \quad \forall h=1, \dots, t-1}$$

$$w_t \stackrel{\text{def}}{=} u_t - \langle u_t, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u_t, v_{t-1} \rangle v_{t-1} = u_t - \sum_{j=1}^{t-1} \langle u_t, v_j \rangle v_j$$

$$w_t \neq 0 \quad \text{Infatti, altrimenti si avrebbe} \quad u_t = \sum_{j=1}^{t-1} \langle u_t, v_j \rangle v_j$$

$$\text{cioè } u_t \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{t-1}) = \text{Span}(u_1, \dots, u_{t-1})$$

assunto perché  $u_1, \dots, u_{t-1}, u_t$  sono stati supposti lin. indep.

Poriamo  $v_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_t}{\|w_t\|}$ , cioè  $v_t$  è un versore.

$$\text{Per costruzione } \langle v_t, v_h \rangle = 0 \quad \forall h=1, \dots, t-1.$$

$$\text{Infine, è chiaro che } \text{Span}(u_1, \dots, u_t) = \text{Span}(v_1, \dots, v_t) \quad \text{SPLG.}$$

~ o ~

$$W \subset \mathbb{R}^n \text{ sottospazio vettoriale} \quad \boxed{\dim(W) = r \quad 0 \leq r \leq n.}$$

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\} \text{ è sottospazio vett. di } \mathbb{R}^n.$$

PROP.  $\dim(W^\perp) = n - r$

Dim.

Sia  $u_1, \dots, u_r$  una base di  $W$ . La prolunga ad una base  $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$  di  $\mathbb{R}^n$ . Applico a tale base il procedimento di ortonormal. di Gram-Schmidt, e trovo  $v_1, \dots, v_n$  base ON di  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre  $v_1, \dots, v_r$  è base ON di  $W$ .

24/11/16

(3)

Sia  $h > r$  arbitrario. Allora da  $\langle v_i, v_h \rangle = 0$  per ogni  $i \leq r$  segue  $v_h \in W^\perp$ . Infatti, se

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in W$  arbitrario, allora da  $h > r$  segue

$$\langle v_h, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_h, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_r \underbrace{\langle v_h, v_r \rangle}_{=0} = 0$$

Dunque  $v_{r+1}, \dots, v_n \in W^\perp$ . Tali el. ti sono lin. indep.

Se proviamo che generano  $W^\perp$ , allora  $\dim(W^\perp) = n - r$ .

Sia  $u \in W^\perp$   $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$   $\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i$ .

Sia  $h$  inter, con  $1 \leq h \leq r$ , arbitrario. Allora  $v_h \in W$ , e quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_h, u \rangle = \langle v_h, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_h, v_j \rangle = \\ &= \alpha_h \underbrace{\langle v_h, v_h \rangle}_{=1} = \alpha_h \end{aligned}$$

Dunque  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ , cioè  $u = \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n$ . 

PROP.

Se  $U \subset W$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$ , allora si ha

$$U^\perp \supset W^\perp. \text{ Inoltre si ha } W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall v \in W^\perp\}$$

$$W^{\perp\perp} = W.$$

Dim.

$U \subset W \Rightarrow U^\perp \supset W^\perp$  è banale. Per l'altra proprietà, un'istante di riflessione mostra che  $W \subset W^{\perp\perp}$ . Ora, se  $\dim(W) = r$ , allora  $\dim(W^\perp) = n - r$  ed, infine  $\dim(W^{\perp\perp}) = n - (n - r) = r$ . Allora da  $W \subset W^{\perp\perp}$  e  $\dim(W) = r = \dim(W^{\perp\perp})$  segue  $W = W^{\perp\perp}$ . 

PROPOSIZIONE

24/11/16

(4)

Se  $U, W$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$  si ha:

1.  $U \subset W \rightarrow U^\perp \supset W^\perp$  (NB: l'inversione delle inclusioni!)
2. Posto  $W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall v \in W^\perp\}$ , si ha  $W^{\perp\perp} = W$
3.  $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$        $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$
4.  $W \cap W^\perp = \{0\}$
5.  $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

Dim.

1. Se  $v \in W^\perp$ , allora  $\langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W$ , quindi in particolare  $\langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in U$ , essendo  $U \subset W$ . Pertanto  $v \in U^\perp$ .
2. Per definizione:  $W \subset W^{\perp\perp}$ . Se  $\dim(W) = r$ , allora  $\dim(W^\perp) = n - r$ .  
Quindi  $\dim(W^{\perp\perp}) = n - (n - r) = r$ . Dunque  $\dim(W) = \dim(W^{\perp\perp})$ .  
Pertanto  $W = W^{\perp\perp}$ .

3. Dimostriamo la prima delle due relazioni:

$$U = \{u + 0 \mid u \in U\} \subset \{u + w \mid u \in U, w \in W\} = U + W \xrightarrow{1} (U + W)^\perp \subset U^\perp$$

Analogamente:  $(U + W)^\perp \subset W^\perp$ . Quindi  $(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$ .

Viceversa, sia  $v \in U^\perp \cap W^\perp$ . Allora per ogni  $u + w \in U + W$  si ha

$$\begin{aligned} \langle v, u + w \rangle &= \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0 \text{ perché } v \in U^\perp} + \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0 \text{ perché } v \in W^\perp} = 0 \quad \text{dunque } v \in (U + W)^\perp \end{aligned}$$

Per provare la seconda relazione poniamo  $L = U^\perp$   $M = W^\perp$ .  
Allora la prima relazione per i sottosp. vett.  $L$  ed  $M$  diventa:

$$(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp \quad \text{cioè } (U^\perp + W^\perp)^\perp = U \cap W$$

da cui, per la 2.:

$$U^\perp + W^\perp = (U^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} = (U \cap W)^\perp$$

4. Sia  $w \in W \cap W^\perp$ . Allora, per def. di  $W^\perp$  si ha  $\langle w, w \rangle = 0$

24/11/16

(5)

La  $\langle, \rangle$  è definita positiva, quindi  $w=0$ .

5. Resta da verificare che  $W+W^\perp=\mathbb{R}^n$ . Questo è equivalente a  $\dim(W+W^\perp)=n$ . Ora, per Grassmann:

$$\dim(W+W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) - \dim(W \cap W^\perp) = n + (n-r) - 0 = n$$

Quindi, per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  si ha che  $v = w + u$  con  $w \in W$  e  $u \in W^\perp$ . Inoltre, tali  $w, u$  sono unici.

Si può, allora, considerare l'applicazione

$$\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow W \quad \text{t.c.} \quad \pi(v) = w \quad \text{se } v, w \text{ sono come sopra.}$$

È chiaro che  $\pi$  è lineare e suriettivo (ESERCIZIO!)

$\pi$  è detta proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^n$  su  $W$ .

DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ

$\langle -, - \rangle$  sia un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ .

$u, v \in \mathbb{R}^n$  arbitrari  $\lambda \in \mathbb{R}$  arbitrario

$$\langle \lambda u - v, \lambda u - v \rangle \geq 0$$

$$\langle \lambda u, \lambda u \rangle - \langle \lambda u, v \rangle - \langle v, \lambda u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \lambda^2 - 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle v, v \rangle$$

Ciò si ha

$$(1) \quad \langle u, u \rangle \lambda^2 - 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Supponiamo  $u \neq 0$ , dunque  $\langle u, u \rangle > 0$ . Allora deve  
averci  $\Delta/4 \leq 0$ , cioè:

$$\langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

Prendendo le radici quadrate di ambo i membri:

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|} \quad (2) \quad \text{questa è la disug. di C-S}$$

Se  $u=0$  questa è vera banalmente.

Quando vale " $=$ " in (2)?

Questo accade  $\Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow$  il primo membro di (1) si  
annulla per  $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}$

Dunque

$$\left\langle \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u - v, \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u - v \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u - v = 0$$

24/11/16

(7)

cioè i vettori  $u, v$  sono linearmente dipendenti.

Viceversa, se  $u, v$  sono linearmente dipendenti.

(ad esempio, se  $v = \lambda_0 u$ ), allora si verifica direttamente che in (2) vale " $=$ ". Riassumendo:

|| in (2) vale " $=$ "  $\Leftrightarrow u, v$  sono linearmente dipendenti

~ o ~

Supponiamo  $u \neq 0, v \neq 0$ .

Allora la (2) si può riscrivere così:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

Abbiamo visto che in  $\mathbb{R}^3$ , risp. al  $\langle -, - \rangle_{st}$ , si ha che

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos(\alpha)$$

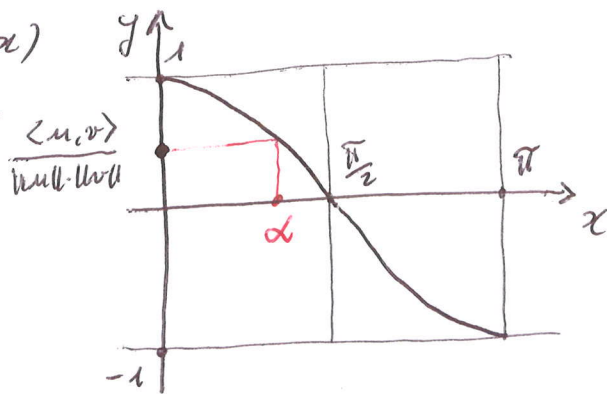


Questo vale in  $\mathbb{R}^n$ , sempre risp. a  $\langle -, - \rangle_{st}$ , in qualsiasi.

In generale possiamo ragionare così:

Il grafico della funzione  $y = \cos(x)$

per  $0 \leq x \leq \pi$  è ||



In particolare tale funzione così ristretta è iniettiva, ed ha per immagine  $[-1, 1]$ . Quindi

per ogni  $t \in [-1, 1]$ , esiste, ed è unico  $\alpha \in [0, \pi]$  tale che

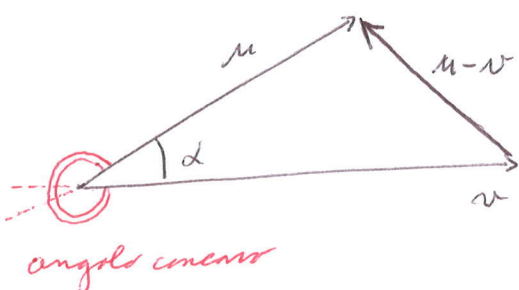
$$\cos(\alpha) = t. \text{ Se } t = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

si definisce  $\alpha$  come l'angolo tra i vettori  $u, v$ .

È possibile definire la funzione coseno senza fare riferimento ad angoli, mediante un'opportuna serie di potenze di  $x$ .

# CONSEGUENZE della DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ

- $u, v \in \mathbb{R}^n$  formano tra di loro l'angolo  $\alpha$   
(si intende con questo l'angolo convesso, cioè quello che non contiene il prolungamento dei lati)



## SPIEGAZIONE EURISTICA

$$\|u-v\| = ?$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle =$$

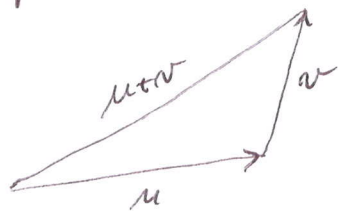
$$\boxed{\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\alpha)}$$

TEOREMA del COSENO  
(o di CARNOT)

- se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (il triangolo di lati  $u, v, u-v$  è rettangolo e  $u, v$  sono i cateti):

$$\boxed{\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2}$$

TEOREMA di PITAGORA



$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \\ &\quad \text{CS} \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\boxed{\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2}$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE