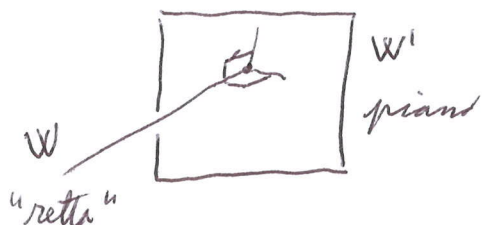


ORTOGONALITÀ TRA RETTE E PIANI DI  $\mathbb{R}^3$ 

Obblighiamo i casi retta  $\perp$  piano, piano  $\perp$  piano, retta  $\perp$  retta.  
 È una situazione che riguarda solo le giaciture.

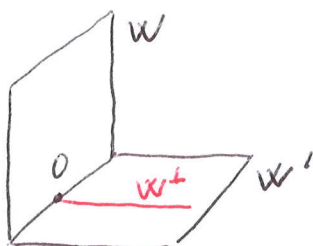
• retta  $\perp$  piano

"visivamente" si capisce che  
 l'ortogonalità tra la retta ed il  
 piano equivale a

$$W^\perp = W'$$

Da tale condizione segue  $W = W^{\perp\perp} = (W')^\perp$

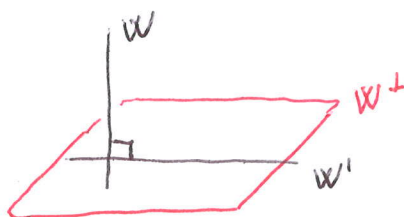
$$\begin{cases} W^\perp = W' \\ \Downarrow \\ (W')^\perp = W \end{cases}$$

• piano  $\perp$  piano

"visivamente" :  $W^\perp \subset W'$   $\Rightarrow$

$$W = W^{\perp\perp} \supset (W')^\perp$$

$$\begin{cases} W^\perp \subset W' \\ \Downarrow \\ (W')^\perp \subset W \end{cases}$$

• retta  $\perp$  retta

"visivamente" :  $W' \subset W^\perp$   $\Rightarrow$

$$(W')^\perp \supset W^{\perp\perp} = W$$

$$\begin{cases} W^\perp \supset W' \\ \Downarrow \\ (W')^\perp \supset W \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$   $\langle -, - \rangle$  pr. scalare fissato ( $\sigma \mathbb{R}^2, \sigma \mathbb{R}^n$ )

Salvo avviso contrario, useremo per  $\mathbb{R}^3$  solo basi ON risp.  $\langle -, - \rangle$ .

$\alpha \subset \mathbb{R}^3$  piano (i)  $ax + by + cz = d$   $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

sia una sua equazione cartesiana.

$B = (v_1, v_2, v_3)$  base ON fissata

$P(x, y, z)$  punto è come dire il vettore  $xv_1 + yv_2 + zv_3$

Indicheremo, inoltre,  $u = a v_1 + b v_2 + c v_3$ .  $u \neq 0$ .

Poiché  $v_1, v_2, v_3$  è base ON di  $\mathbb{R}^3$ , cioè

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

✓ SPIEG

allora si ha  $ax + by + cz = \langle u, \vec{OP} \rangle$

Dunque l'equazione (1) di (2) significa che  $\forall P \in \alpha$  il prodotto scalare  $\langle u, \vec{OP} \rangle$  ha il valore costante  $b$ .

Vogliamo approfondire.

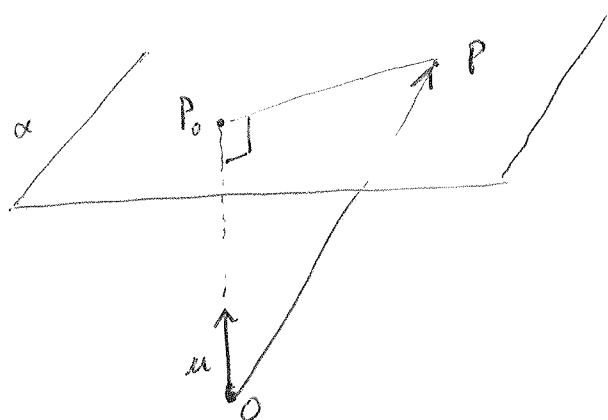
La direzione di  $\alpha$  ha equazione:

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{cioè} \quad \langle u, \vec{OP} \rangle = 0$$

Ciò, se  $\alpha = Q + W$  ( $Q \in \alpha$  fissato) allora ~~non~~

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, w \rangle = 0\} = \text{Span}(u)^\perp \Rightarrow \text{Span}(u) = W^\perp$$

Ciò:  $u$  genera la direzione  $W^\perp$ .



La retta  $O + W^\perp$  non è parallela ad  $\alpha$ , dunque interseca  $\alpha$  in un unico punto:  $P_0$ .

Ora, per ogni  $P \in \alpha$  si ha che

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} \quad \text{dove} \quad \underbrace{\vec{P_0P}}_{\substack{= 0 \\ \downarrow}} \in W$$

Allora:

$$\langle u, \vec{OP} \rangle = \langle u, \vec{OP_0} + \vec{P_0P} \rangle = \langle u, \vec{OP_0} \rangle + \underbrace{\langle u, \vec{P_0P} \rangle}_{= 0} = \langle u, \vec{OP_0} \rangle = b$$

Osserviamo che il triangolo  $OP_0P$  è rettangolo in  $P_0$ , per ogni  $P \in \alpha$ . Dunque

$$\underbrace{\|\vec{OP_0}\|}_{\text{cateto}} \leq \underbrace{\|\vec{OP}\|}_{\text{l'ipotenusa}} \quad \forall P \in \alpha$$

Ciò:  $P_0$  è il punto di  $\alpha$  alla minima distanza da  $O$ .

verifichiamolo coi conti:

$$\begin{aligned}\|\vec{OP}\|^2 &= \langle \vec{OP}, \vec{OP} \rangle = \langle \vec{OP}_0 + \vec{P}_0\vec{P}, \vec{OP}_0 + \vec{P}_0\vec{P} \rangle = \langle \vec{OP}_0, \vec{OP}_0 \rangle + \cancel{2\langle \vec{OP}_0, \vec{P}_0\vec{P} \rangle} + \underbrace{\langle \vec{P}_0\vec{P}, \vec{P}_0\vec{P} \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \|\vec{OP}_0\|^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\|\vec{OP}\| \geq \|\vec{OP}_0\|}\end{aligned}$$

Supponiamo ora che  $u$  sia un vettore:  $\|u\|=1$ .

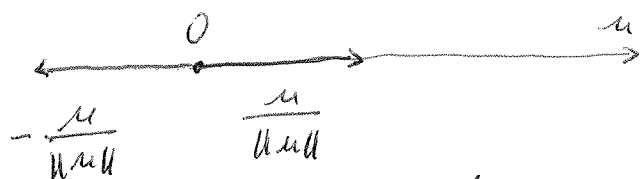
Questo non è restrittivo perché l'equazione (1) è definita solo a meno di un fattore di proporzionalità  $\neq 0$ .

Orlora, se  $\|u\| \neq 1$  si ha che  $\|\frac{u}{\|u\|}\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1$ ; basta quindi dividere la (1) per  $\|u\|$ .

In tal caso  $\|u\|=1$  si ha (supp.  $O \neq P_0$  SPIEGARE)

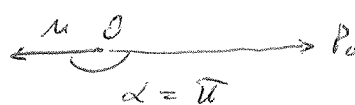
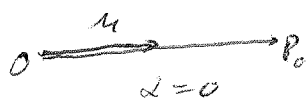
$$b = \langle \vec{OP}_0, u \rangle = \|u\| \cdot \|\vec{OP}_0\| \cdot \cos(\alpha) = \|\vec{OP}_0\| \cos(\alpha)$$

La "magagna" è che in  $\text{Span}(u)$  ci sono due vettori



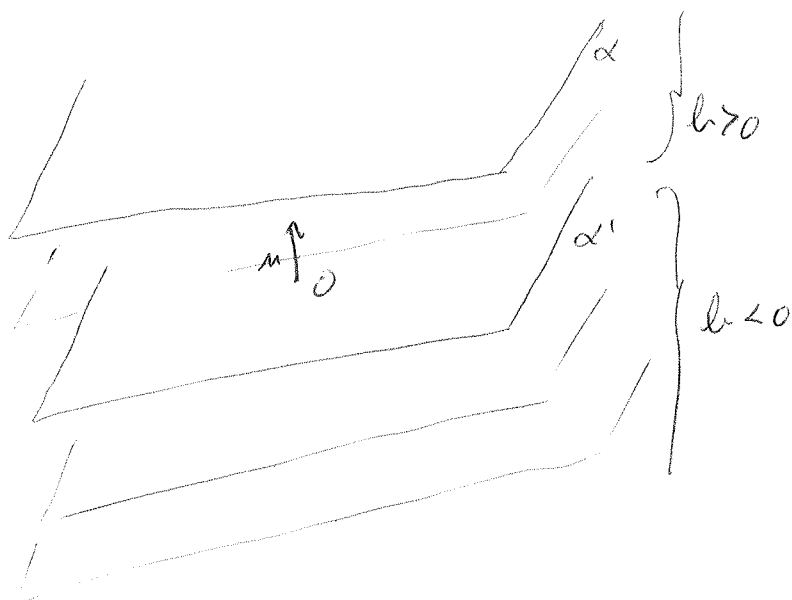
Quindi: se  $\alpha=0$ ,  $\cos(\alpha)=1$

se  $\alpha=\pi$ ,  $\cos(\alpha)=-1$



Comunque:

$|b| = \|\vec{OP}_0\|$  è la distanza di O da  $\alpha$



$\alpha \parallel \alpha' \quad 0 \in \alpha' \quad \|u\|=1$

Significato geometrico.

28/11/16

siano  $r, r'$  due rette in  $\mathbb{R}^3$ .  $r = A + W$   $r' = B + W'$

Possiamo, allora, considerare il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{ \underbrace{\| \vec{QQ'} \|}_{\geq 0} \mid Q \in r, Q' \in r' \}$$

Se  $r \cap r' \neq \emptyset$ , allora  $0 \in D$  è il minimo dei numeri in  $D$ .

Altrimenti  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \inf(D)$  (dunque supponiamo  $r \cap r' = \emptyset$ )

$$\delta > 0.$$

PBL Esistono  $P \in r, P' \in r'$  tali che  $\| \vec{PP'} \| = \delta$ ?

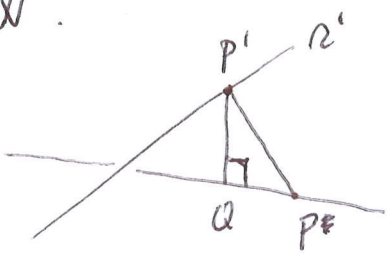
Supponiamo che tali punti  $P, P'$  esistano

Allora si ha  $\vec{PP'} \in W^\perp$ . e, per "simmetria":  $\vec{PP'} \in (W')^\perp$

Dunque  $\vec{PP'} \in W^\perp \cap (W')^\perp$

Proviamo che  $\vec{PP'} \in W^\perp$ . Per assurdo, supponiamo che  $\vec{PP'} \notin W^\perp$ .

Abbiamo definita in una delle ultime lezioni la proiezione ortogonale  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow r$  lungo la direzione  $W^\perp$ .



Ricordiamo che, se  $C \in \mathbb{R}^3$  è arbitrario allora il piano  $C + W^\perp$  non è  $\parallel r$ .

$$\text{Si pone } \pi(C) \stackrel{\text{def}}{=} r \cap (C + W^\perp)$$

$$\text{Sin } Q \stackrel{\text{def}}{=} \pi(P').$$

Il triangolo  $PQP'$  è rettangolo in  $Q$ . Dunque

$$\| \vec{P'Q} \| < \| \vec{P'P} \| = \| \vec{PP'} \| \quad \text{assurdo.}$$

Nel caso  $r, r'$  siano due rette sghembe, allora

$$W \neq W' \rightarrow W^\perp \neq (W')^\perp \quad (\text{perché?}) \Rightarrow W^\perp + (W')^\perp = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \dim(W^\perp \cap (W')^\perp) = \dim(W^\perp) + \dim((W')^\perp) - \dim \mathbb{R}^3 = 2 + 2 - 3 = 1$$

Grassmann

Quindi per sperare di trovare i punti "giusti"  $P$  e  $P'$ , dobbiamo cercare una retta  $s$ , perpendicolare sia ad  $r$  che ad  $r'$

ESERCIZIO

$\mathbb{R}^3$ ,  $\langle -, - \rangle_{st}$ ,  $e_1, e_2, e_3$  base ON.

Consideriamo le due rette  $r, r'$ , dove  $r$  ha eq. cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

mentre di  $r'$  sappiamo che contiene il punto  $(1, 0, 1)$ , ed ha direzione generata

$$\text{da } \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Esiste una retta  $s$  che sia perpendicolare sia ad  $r$  che ad  $r'$ , ed incidente sia  $r$  che  $r'$ ?

Devo capire, innanzitutto, in quale posizione reciproca sono sia  $r$  che  $r'$ .

Posso trovare facilmente equazioni parametriche per  $r'$ :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$$

signif. geometrica

$r \cap r' = \emptyset$  COMMENTARE  $\begin{cases} 1+t-t-1=1 \\ 2(1+t)-t+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1=0 \\ t+3=0 \end{cases}$

La direzione di  $r$  è data da

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \quad z=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=-2$$

Ciò, la direzione di  $r$  è generata da  $\begin{vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$

$$\underbrace{\text{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}\right)}_W \neq \underbrace{\text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}\right)}_{W'} \Rightarrow r, r' \text{ sono rette sghembe}$$

$$W^\perp \ni -2x + 3y + z = 0 \quad (W')^\perp \quad x - y = 0$$

La direzione  $W''$  della retta cercata  $s$  è necessariamente  $W^\perp \cap (W')^\perp$

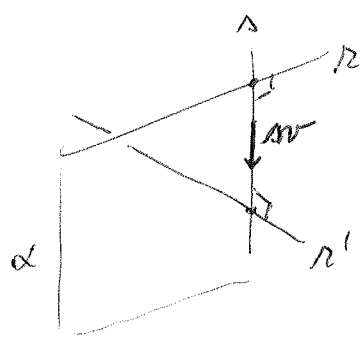
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad W'' = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}\right) \quad w = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

piano generico passante per  $r$ :

$$\lambda(x+y-z-1) + \mu(2x+y+z) = 0 \quad \swarrow \begin{matrix} (\lambda, \mu) \neq (0,0) \\ \text{la sua direzione ha equaz.} \end{matrix}$$

$$(\lambda+2\mu)x + (\lambda+\mu)y + (-\lambda+\mu)z = 0$$

Cerco il piano per  $r$  la cui direzione contiene  $w$



In fatti, supponendo che esista  $s$ , uno dei piani contenenti  $s$  contiene  $r$  e la sua direzione contiene  $w$

$$(\lambda+2\mu) \cdot 1 + (\lambda+\mu) \cdot 1 + (-\lambda+\mu)(-1) = 0$$

$$\lambda+2\mu+\lambda+\mu+\lambda-\mu=0$$

$$3\lambda+2\mu \quad \boxed{\lambda=2 \quad \mu=-3}$$

$$2(x+y-z-1) - 3(2x+y+z) = 0$$

$$-4x - y - 5z - 2 = 0$$

$$\boxed{4x + y + 5z = -2}$$

eq. cart. del piano  $\alpha$ .

COMPLETARE l'esercizio.

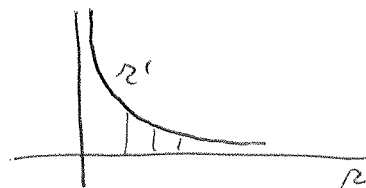
$$r \cap s = \{P\} \quad r' \cap s = \{P'\}$$

ESERCIZIO Che cosa si può dire dell'insieme  $D$  e di eventuali coppie di punti  $P, P'$  nel caso in cui  $r \parallel r'$  e  $r \neq r'$ ?

OSSERVAZIONE

$\mathbb{R}^2$  e sia l'asse  $x$

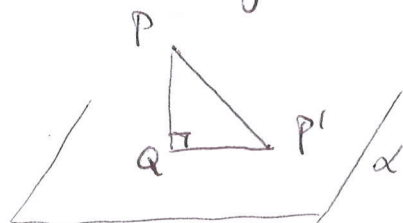
$$r' = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$$



Allora  $r \cap r' = \emptyset$ , ma  $\inf(D) = 0$

Analizziamo un altro caso. Invece di considerare la distanza tra due rette considereremo la distanza tra un punto  $\bar{P}$   $P(x_0, y_0, z_0)$  ed un piano  $\alpha$   $ax+by+cz=d$   $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ .

Se esiste  $P' \in \alpha$  tale che  $\|\overrightarrow{PP'}\| = \min(D)$ , allora  $\overrightarrow{PP'} \in W^\perp$ , dove  $W$  è la giacitura di  $\alpha$ . Altrimenti.



si avrebbe  $Q = \pi(P) \neq P'$ , dove  $\pi$  indica la proiezione ortogonale su  $\alpha$ .  
In tal caso  $\|\overrightarrow{PQ}\| < \|\overrightarrow{PP'}\|$ , assurdo.

Concretamente, posto  $s = P + W^\perp$  si ha che  $P' = s \cap \alpha$ .

Ora  $W^\perp = \text{Span}(u)$ . Quindi cerchiamo  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$P + \lambda u \in \alpha \iff \langle u, P + \lambda u \rangle = d \text{ o meglio } \langle u, \overrightarrow{OP} + \lambda u \rangle = d$$

$$\langle u, \overrightarrow{OP} \rangle + \lambda \underbrace{\langle u, u \rangle}_{>0} = d \implies \lambda = \frac{d - \langle u, \overrightarrow{OP} \rangle}{\langle u, u \rangle} \text{ e si ha}$$

$$P' = P + \frac{d - \langle u, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|u\|^2} u \implies \overrightarrow{PP'} = P' - P = \frac{d - \langle u, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|u\|^2} u$$

da cui

$$\text{dist}(P, \alpha) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \left\| \underbrace{\frac{d - \langle u, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|u\|^2}}_{\in \mathbb{R}} u \right\| = \frac{|\langle u, \overrightarrow{OP} \rangle - d|}{\|u\|} \|u\|$$

Infine

$$\text{dist}(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Un ragionamento analogo si può fare nel piano.