

$\mathbb{R}^3$ $\langle -, - \rangle$ prodotto scalare fisso: $\mathbb{E}^3$ spazi euclidei
 $(\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle) \cong \mathbb{E}^2$ piano

v_1, v_2, v_3 base ON di $\mathbb{R}^3$

$$P \in \mathbb{R}^3 \quad P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = P - O \quad P(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x v_1 + y v_2 + z v_3$$

(x, y, z) : coordinate cartesiane ortogonali.

non

ESERCIZIO In $\mathbb{E}^3$ son fissati una retta r ed un punto P .

Esistono piani passanti per P ed ortogonali ad r ? Sono unici? Considera il caso in cui $P(4, 1, 0)$ e la retta r è

$$r \quad \begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Se W è la direzione di r , un piano α ortogonale ad r avrà giacitura $W^\perp$ ($\dim(W) = 1 \Rightarrow \dim(W^\perp) = 3 - 1 = 2$). Dunque $\alpha = P + W^\perp$ è l'unico piano che soddisfa le condizioni richieste. Nel "caso concreto", la direzione di r è generata da una soluzione non banale di

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{ad esempio } (1, 1, -2) \quad \text{cioè} \quad W = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$W^\perp \quad \text{ha equazione} \quad x + y - 2z = 0$$

Un generico piano con quella giacitura ha equazione
 $x + y - 2z = d$ (fascio improprio di piani)

$$\text{Impongo il passaggio per } P \quad 4 + 1 - 2 \cdot 0 = d \quad d = 5$$

$x + y - 2z = 5$ è il piano richiesto.

ESERCIZIO

In $\mathbb{E}^3$ sono fissati un punto P ed un piano α . Si studi l'insieme dei piani passanti per P ed ortogonali ad α . Si analizzi poi il caso concreto in cui $P(0,1,-1)$ ed α ha equaz. cartesiana $4x+2y+7z=3$. $W^\perp \cdot P$

Sia W la giacitura di α .

Se β è un piano ortogonale ad α , di giacitura W' , allora deve aversi $W^\perp \subset W'$.

Inoltre, se $P \in \beta$, allora β contiene la retta $P+W^\perp$.

viceversa, se γ è un piano contenente la retta $P+W^\perp$, allora $P \in \gamma$ e la giacitura di γ contiene $W^\perp$. Dunque $\gamma \perp \alpha$.

La giacitura $W^\perp$ di α ha equazione $4x+2y+7z=0$. Quindi $W^\perp = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$. La retta $r = P+W^\perp$ ha eq. parametriche

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 1+2t \\ z = -1+7t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{4}x \quad \text{Quindi equazioni cartesiane per } r \text{ sono}$$

$$\begin{cases} y = 1+2\frac{1}{4}x \\ z = -1+7\frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+2=0 \\ 7x-4z-4=0 \end{cases}$$

Infine, il generico piano di $\mathbb{E}^3$ contenente r ha equazione

$$\lambda(x-2y+2) + \mu(7x-4z-4) = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

ESERCIZIO In $\mathbb{E}^3$ si hanno le due rette incidenti.

$$r \begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \quad r' \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Trovare un'equazione cartesiana per il piano α che contiene r ed r' .

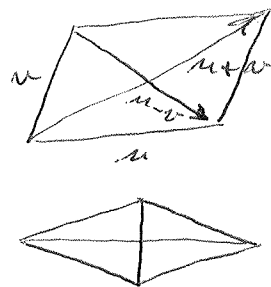
Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per le bisettrici degli angoli formati da r ed r' nel piano α .

risparmiando 0 e $2a, 2a'$. Inoltre, le direzioni W, W' rispettivamente di r ed r' sono generate da $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dunque $r \neq r'$.

Un'equazione cartesiana del piano π è data da:

$$\det \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{y - 2z = 0}$$

$u, v \in \mathbb{R}^n$ vettori, non nulli. Li penso come dati di un parallelogramma. Allora le diagonali di tale parallelogramma sono $u+v$ e $u-v$. Verificare che $u+v \perp u-v \iff \|u\| = \|v\|$ (cioè se il parall. è un rombo).



$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|u\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3 \quad \text{prendi} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allora le bisettrici cercate avranno direzioni generate rispettivamente da

$$u+v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u-v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troverò tali bisettrici passano entrambe per O , (le) loro equazioni parametriche sono rispettivamente

$$L_1 \quad \begin{cases} x = 5t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$L_2 \quad \begin{cases} x = -s \\ y = 2s \\ z = s \end{cases}$$

da cui si ricavano immediatamente eq. cartesiane.

ESERCIZIO Si scrivano equazioni per il luogo dei punti di $\mathbb{E}^3$, appartenenti al piano $y - z + 2z = 0$, ed equidistanti dai punti $A(1, 0, -1)$ e $B(2, 1, -1)$.

sin $P(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ arbitrario. La distanza di P da A è

$$\|AP\| = \|P - A\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2} \quad \text{Analogamente}$$

$$\|BP\| = \|P - B\| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2} \quad \text{Dunque}$$

$$\|AP\| = \|BP\| \Leftrightarrow \|AP\|^2 = \|BP\|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \quad 2x + 2y = 4$$

$$x + y = 2$$

Equazioni per il luogo cercato sono

$$\begin{cases} y - z = -2 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Rg} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \text{il luogo è una retta}$$

ESERCIZIO In $\mathbb{E}^3$ si hanno le rette

$$r \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \quad s \begin{cases} x - 4z + 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Trovare il piano parallelo ad entrambe le rette, e da esse equidistante.

Cercare la direzione di r $\xrightarrow{\text{spieg}} T(r) \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad T(r) = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$

$T(s) \begin{cases} x - 4z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad T(s) = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$

Il piano α cercato (è unico ed) ha come generatore $W = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$

$$W = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

$\alpha: ax + by + cz = d$ dove $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $\text{Span} \left(\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \right) = W^\perp$

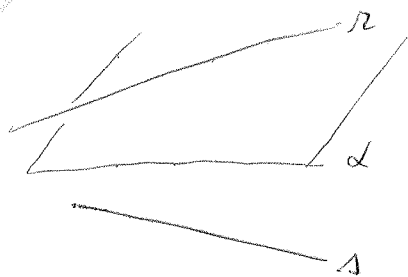
Quindi: $\left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow b + c = 0 \quad \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \right\rangle = 0 \quad \underline{a = 0}$

$\alpha: \underline{y - z = d}$ devo determinare d in modo che sia

soddisfatta l'ultima condizione.

29/11/16

(5)



L'idea è che, essendo $R \parallel d$, tutti i punti di R hanno da d la stessa distanza. Proviamola:

Il punto generico di R è $(2z+1, z-1, z)$. La sua dist. da d è

$$\frac{|z-1-z-d|}{\sqrt{2}}$$

Il punto generico di S è $(4z-1, z+2, z)$. La sua dist. da d è

$$\frac{|z+2-z-d|}{\sqrt{2}} = \frac{|d+1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d-z)^2 = (d+1)^2$$

$$d^2 - 4d + 4 = d^2 + 2d + 1$$

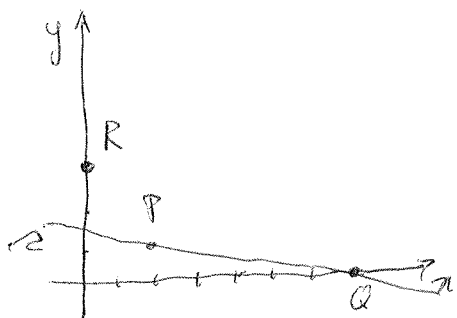
$$6d = 3 \quad d = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\alpha \quad y - z = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

ESERCIZIO Nel piano affine euclideo $\mathbb{E}^2$ si considerino i punti $P(2,1)$ $Q(7,0)$ $R(0,3)$. Si trovi un'equazione cartesiana per la retta r passante per P e Q . Si trovino eq. cartesiane per le rette per R , che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{3}$ (60°).



$y - 0 = m(x - 7)$ fascio di rette per Q
impongo il passaggio per P

$$1 = m(2 - 7) \quad m = -\frac{1}{5}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}}$$

$$x + 5y - 7 = 0$$

↗ è un vettore

W sia la direzione di r

$$W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \text{sin t.c.} \quad \frac{5}{\sqrt{26}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{26}} \beta = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

29/11/16

(6)

$$\begin{cases} 5\alpha - \beta = \frac{\sqrt{26}}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

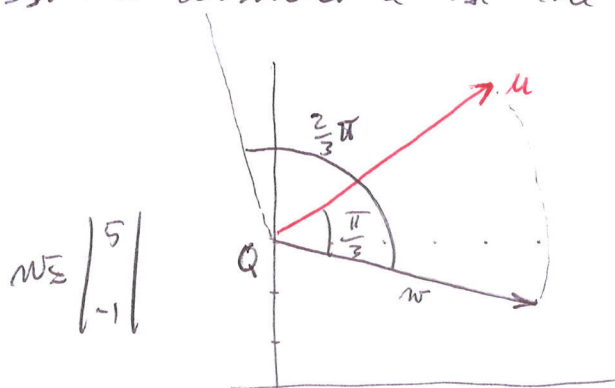
$$\beta = 5\alpha - \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\alpha^2 + 25\alpha^2 - 5\sqrt{26}\alpha + \frac{26}{4} = 1$$

$$26\alpha^2 - 5\sqrt{26}\alpha + \frac{22}{4}$$

$$\Delta = 25 \cdot 26 - 22 \cdot 26 = 3 \cdot 26 > 0$$

si va avanti e se ne viene fuori -



oppure provi a vedere se funziona il "truccetto" del Rombo

$$\frac{2}{3}\pi = 120^\circ \quad \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ruota w di 120° in verso antiorario

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Equazioni parametriche per la retta passante per Q , con la direzione generata da u sono

$$\begin{cases} x = t\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y = 3 + t\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} x + 3 \quad \text{eq. cartesiane.}$$

L'altra retta si trova ruotando w di 120° in verso orario. La matrice di tale rotazione è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO $\mathbb{E}^3 \quad \alpha \quad x+y-\sqrt{3}z=0$

$P(7,1,0) \in \alpha$. Determinare le rette di α passanti per P che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con l'asse z .

giacitura di $\alpha \quad x+y-\sqrt{3}z=0 \quad \sin W$

$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right) \quad \text{Cercare una base ON di } W$

$\mu_1 \quad \mu_2$

Cercare $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\mu_2 + \lambda \mu_1 \perp \mu_1 \iff \langle \mu_2 + \lambda \mu_1, \mu_1 \rangle = 0$

$\langle \mu_2, \mu_1 \rangle + \lambda \langle \mu_1, \mu_1 \rangle = 0 \quad \frac{1}{3} + \lambda \frac{4}{3} = 0 \quad \lambda = -\frac{1}{4}$

$\mu_2 - \frac{1}{4} \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$

~~$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$~~

$\|\mu_1\| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \nu_1 = \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \nu_1 \text{ è un vettore}$

$\|\mu_2 - \frac{1}{4} \mu_1\| = \sqrt{\frac{1}{16} + 1 + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{20}{16}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\nu_2 = \frac{\mu_2 - \frac{1}{4} \mu_1}{\|\mu_2 - \frac{1}{4} \mu_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{20} + \frac{4}{5} + \frac{3}{20} = \frac{1+16+3}{20} = 1$

Un generico vettore in $W = T(\alpha)$ si scrive, allora, nel modo qui a lato

$\cos(\alpha) \nu_1 + \sin(\alpha) \nu_2 =$

28/11/16

(8)

$$= \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2\sqrt{5}} \sin(\alpha) \\ \cancel{\cos(\alpha)} & \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(\alpha) \\ \frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = x$$

$$\sin(\alpha) = y$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{3}{5}} y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} y$$

$$1 - 2\sqrt{\frac{3}{5}} y + \frac{3}{5} y^2 + y^2 = 1$$

$y = 0$ $x = 1$ è soluzione; corrisponde al vettore v_1

$$\frac{8}{5} y = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$y = \frac{1}{4} \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = ??$$

$$\langle \cos(\alpha) v_1 + \sin(\alpha) v_2, \overset{\text{SPICCO}}{\downarrow} e_3 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \sin(\alpha) \stackrel{\text{cond. del probl.}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$