La dispersione in fibra ottica

Iniziamo l'analisi della dispersione ricordando alcune definizioni.

Indice effettivo visto dal modo: $n_e = \beta/k$. $\qquad \omega^2 \mu \varepsilon = n^2 k^2$

Velocità di gruppo: $V_g = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)^{-1} = c\left(\frac{\partial \beta}{\partial k}\right)^{-1}$. $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad k = \frac{\omega}{c}$

Ritardo di gruppo: $\tau_g = \frac{\ell}{c}\left(\frac{\partial \beta}{\partial k}\right)$ (dove ℓ=lunghezza fibra).

Dispersione: $D = \left(\frac{\partial \tau_g}{\partial k}\right)\Delta k_s$.

dove, detta $\Delta\lambda_s$ l'ampiezza spettrale di emissione della sorgente, è

$$\Delta k_s = -\frac{2\pi}{\lambda^2}\Delta\lambda_s.$$

$$D = \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\ell}{c}\frac{\partial(n_e \cdot k)}{\partial k}\right) \cdot \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda_s\right)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{n_e \cdot 2\pi}{\lambda}\right)\right) \cdot \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda_s \cdot \frac{\ell}{c}\right)$$

$$= \frac{\ell}{c} \cdot \Delta\lambda_s \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{-\lambda^2}{2\pi} \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{\lambda^2} n_e + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial n_e}{\partial \lambda}\right)\right)$$

$$= \frac{\ell}{c} \cdot \Delta\lambda_s \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(n_e - \lambda \frac{\partial n_e}{\partial \lambda}\right) = \frac{\ell}{c} \cdot \Delta\lambda_s\left[\cancel{\frac{\partial n_e}{\partial \lambda}} - \cancel{\frac{\partial n_e}{\partial \lambda}} - \lambda \frac{\partial^2 n_e}{\partial \lambda^2}\right]$$

$$= -\frac{\ell}{c} \cdot \Delta\lambda_s \cdot \lambda \frac{\partial^2 n_e}{\partial \lambda^2}$$

Dispersione $\boxed{D = -\frac{\ell}{c} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial^2 n_e}{\partial \lambda^2} \cdot \Delta\lambda_s}$