

RIASSUNTO della LEZIONE di IERI:

1) $\mathbb{R}^n + \langle -, - \rangle$ prod. scalare fissato + $\mathcal{B}$ base ON di $\mathbb{R}^n$ risp. $\langle -, - \rangle$ fiss. è $\mathbb{E}^n$, SPAZIO AFFINE EUCLIDEO

2) $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ l.c. $d(A, B) = \|B - A\| = \|f(B) - f(A)\| = d(f(A), f(B))$
 $\forall A, B \in \mathbb{E}^n$ si dice ISOMETRIA

3) Se $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ è un'isometria, allora esiste $f_*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare l.c., comunque sia fissato $Q \in \mathbb{E}^n$, si ha

$$(4) \quad \underline{f(P) = f(Q) + f_*(Q\vec{P})} \quad \forall P \in \mathbb{E}^n \quad (\Leftrightarrow \overrightarrow{f(Q)f(P)} = f_*(Q\vec{P}))$$

4) Se f, f_* sono come in 3), allora $\langle f_*(u), f_*(v) \rangle = \langle u, v \rangle$
 $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ f_* è detto endomorfismo ORTOGONALE

In particolare: $\|f_*(u)\| = \|u\| \quad \forall u$

5) Se $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_*)$, dove $\mathcal{B}$ è come in 1), allora

a) le colonne di A formano una base ON risp. $\langle -, - \rangle_{st}$;
 $\Updownarrow \leftarrow$ spieg.

$$b) \quad {}^tAA = I_n$$

$\Updownarrow$
 c) A è invertibile e $\underline{A^{-1} = {}^tA}$ (2)

$$\Updownarrow$$

$$d) \quad A {}^tA = I_n$$

$\Updownarrow$
 e) le righe di A formano una base ON risp. $\langle -, - \rangle_{st}$;

$\nearrow f_*$ è isomorfismo AUTOMORFISMO

$\downarrow (1)$

f è suriettiva

Def. Una matrice A $n \times n$, invertibile che verifica (2) si dice matr. ORTOGONALE.

~ o ~

PROPOSIZIONE $\checkmark$ è ON!

(i) $\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle, \mathcal{B}$ come sopra $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$

Allora $\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle \iff \forall u, v \in \mathbb{R}^n \iff A$ è m. ortogonale

(i) $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ verificando la cond. (i) per un'opportuna appl. lineare f_* . (E' una tale f si dice APPLICAZIONE AFFINE; si può dimostrare che f_* è univocamente determinata). Allora f è un'isometria $\Leftrightarrow \langle f_*(u), f_*(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Dim.

(i) Abbiamo visto ieri che se f_* conserva i prodotti scalari, allora A è m. ortogonale, cioè $A^{-1} = {}^t A$.

Viceversa, supponiamo che $A^{-1} = {}^t A$. $u, v \in \mathbb{R}^n$ li rappresentiamo con i vettori colonna U, V delle loro componenti risp. base B .

Allora

$$\begin{aligned} \langle f_*(u), f_*(v) \rangle &= \langle AU, AV \rangle = {}^t(AU)AV = {}^tU {}^tA AV = {}^tU A^{-1}AU = \\ &= {}^tU I_n V = {}^tUV = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dim (ii) Bori abbiamo visto anche che, se f è un'isometria, allora f_* conserva i prodotti scalari.

Viceversa, presi comunque $A, B \in \mathbb{E}^n$ si ha

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A, B - A \rangle} = \sqrt{\langle f_*(B - A), f_*(B - A) \rangle} \stackrel{(i)}{=} \\ &= \sqrt{\langle f(B) - f(A), f(B) - f(A) \rangle} = \|f(B) - f(A)\| = d(f(A), f(B)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ESEMPLI DI ISOMETRIE

TRASLAZIONI

$u \in \mathbb{R}^n$ fissato $\tau_u: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n \quad \tau_u(P) \stackrel{\text{def}}{=} P + u$

$P' \in \mathbb{E}^n$ arbitrario

$$d(\tau_u(P), \tau_u(P')) = \|P' + u - (P + u)\| = ? \quad \boxed{\times}$$

Sia $P' = P + v$ $v \in \mathbb{R}^n$ esiste ed è unico. Allora

$$(P + u) + v = P + u + v = (P + v) + u = P' + u \quad \text{. Cioè si ha}$$

è un parallelogramma

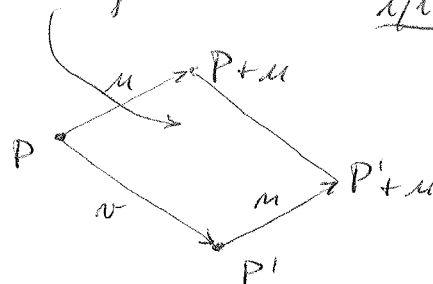
1/12/16

(3)

$$(P' + u) - (P + u) = \cancel{P' - P} = P' - P$$

da cui:

$$\boxed{\star} = \|u\| = \|P' - P\| = d(P, P')$$



Chi è f_* per una traslazione? E cioè $(\tau_u)_* = ?$

Sia $Q \in \mathbb{E}^n$. Allora deve valere:

$$\tau_u(P) = \tau_u(Q) + (\tau_u)_*(\overrightarrow{QP})$$

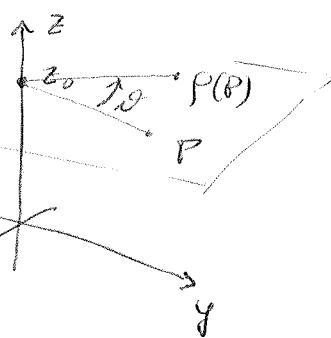
$$P + u - (Q + u) = P - Q = \overrightarrow{QP} \quad \forall P$$

visti sopra

$$\text{dunque } (\tau_u)_* = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

[per semplificare i conti. Ci ritorna -
remo sopra.

ROTAZIONE ρ in $\mathbb{E}^3$, attorno all'asse z , di un angolo α



Se $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$ è arbitrario, allora P appartiene al piano $z = z_0$, parallelo al piano coordinato x, y .

Inoltre, è chiaro che anche $\rho(P)$ appartiene a tale piano, solo le coordinate x, y cambiano.

Osserviamo anche che tutti i punti dell'asse z vengono lasciati invariati da ρ : se $Q(0, 0, a)$, allora $\rho(Q)(0, 0, a)$

Dunque i punti dell'asse z sono tutti PUNTI UNITI resp

Osserviamo, invece, che una traslazione τ_u non ha punti uniti se $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Invece $\tau_0 = \text{id}_{\mathbb{E}^n}$, e ogni punto di $\mathbb{E}^n$ è p. to unito.

Equazioni per una traslazione (nel caso $\mathbb{E}^3$, per $\mathbb{E}^n$ ---)

$$\text{Sia } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \text{ Allora}$$

$$(\star) \begin{cases} x' = x + u_1 \\ y' = y + u_2 \\ z' = z + u_3 \end{cases}$$

dove $P(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ è arbitrario e $P'(x', y', z') = \tau_u(P)$

Se $O(0, 0, 0)$ è l'origine (= il vettore nullo), allora $\tau_u(O) = (u_1, u_2, u_3)$

Basterebbe, allora, riscrivere (*) così:

$$\mathcal{C}_u(P) = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_u \quad \underbrace{\quad}_{\vec{OP}}$
 $\mathcal{C}_u(0)$

che mostra come $(\mathcal{C}_u)_* = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$

Equazioni per la rotazione considerata

$$\begin{cases} x' = \cos(\alpha) x - \sin(\alpha) y \\ y' = \sin(\alpha) x + \cos(\alpha) y \\ z' = z \end{cases}$$

$$P(P) = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{P(\vec{OP})} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{P(0)} \quad \underbrace{\quad}_{P_*(\vec{OP})}$

Osserviamo che le colonne di

$$A = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

formano una base ON ^{rispetto al} ~~per il~~ prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$

Dunque $A^{-1} = {}^t A$, cioè A è matrice ortogonale.

Per la proposizione precedente, P è un'isometria. Cioè: non serve fare la verifica diretta.

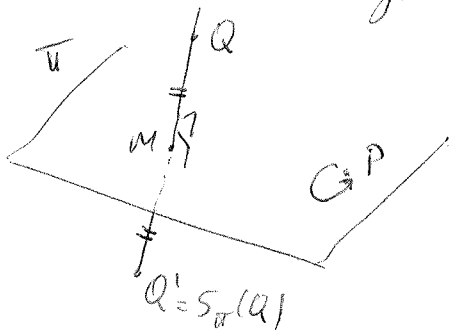
SIMMETRIA ORTOGONALE RISPETTO AD UN PIANO

(e sia W la marginazione)

Sia $\pi \subset \mathbb{E}^3$ un piano fissato. Sia $S_\pi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$

def. da: preso comunque $P \in \mathbb{E}^3$

$$S_\pi(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in \pi \\ P' & \text{con } \vec{PP'} \in W^\perp \text{ e la retta per } P, P' \\ & \text{interseca } \pi \text{ nel punto medio del} \\ & \text{segmento } PP'. \end{cases} \quad \text{se } P \notin \pi$$



Dovrebbe essere chiaro che

- ogni punto di π è punto fisso per S_π .
- $S_\pi \circ S_\pi = \text{id}_{\mathbb{E}^3} \Rightarrow S_\pi$ è biettiva

$$e \quad (S_\pi)^{-1} = S_\pi$$

(che sono $(\mathcal{C}_\pi)^{-1}$ e $(\rho_\pi)^{-1}$?)

Per scrivere S_π in coordinate, cominceremo col caso in cui π passa per l'origine, cioè da una sua equazione cartesiana è $ax+by+cz=0$ con $\mu = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$.

Abbiamo visto che è lecito assumere

$$\| \mu \| = 1 \quad \text{cioè} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ arbitrario. Allora l'ipotesi² per P , ortogonale a π ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{Calcoliamo } \mathbb{R} \cap \pi \quad (\text{COMMENTARE}).$$

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) = 0$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{=1} t = 0$$

$$\Rightarrow t = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Quindi $P' = S_\pi(P)$ corrisponderà a $t = -2(ax_0 + by_0 + cz_0)$, cioè le coordinate di P' saranno

$$x' = x_0 - 2a(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

$$y' = y_0 - 2b(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

$$z' = z_0 - 2c(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Anche qui posso pensare che ci sia $S_\pi(\underline{0}) = \underline{0}$

EXE: verificare che F è una matrice ortogonale. Calcolare $\det(F)$.

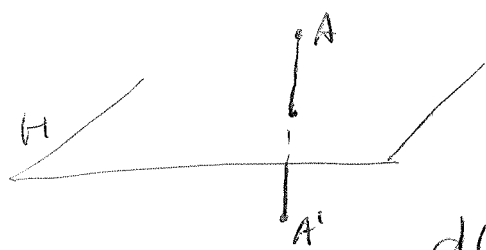
~ o ~

Def. Se $f: E^n \rightarrow E^n$ è un'isometria, e se $P \in E^n$ è tale che $f(P) = P$, chiameremo P un punto fisso per f .

LEMMA

Se $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ è un'isometria e se $f \neq \text{id}_{\mathbb{E}^n}$, allora gli eventuali punti uniti di f sono tutti contenuti in un iperpiano di $\mathbb{E}^n$ (un iperpiano è l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione del tipo $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = d$, con $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$). Nel caso di $\mathbb{E}^3$ è un piano, nel caso di $\mathbb{E}^2$ è una retta).

Dim. Da $f \neq \text{id}_{\mathbb{E}^n}$ segue che esiste $A \in \mathbb{E}^n$ tale che $A' = f(A) \neq A$. Abbiamo visto (con un esercizio, in $\mathbb{E}^3$) che il ragionamento vale in generale) che il luogo H def. da $H \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{E}^n \mid d(P, A) = d(P, A')\}$ è un iperpiano di $\mathbb{E}^n$. Cioè: è l'iperpiano di $\mathbb{E}^n$, ortogonale alla retta per A e A' , e passante per il punto medio del segmento AA' .



Detta questa, sia P un punto unito per f . Allora, poiché f è un'isometria

$$d(P, A') = d(\underbrace{f(P)}_P, \underbrace{f(A)}_{A'}) = d(P, A) \Rightarrow \underline{P \in H}$$

TEOREMA

Sia $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ un'isometria avente $n+1$ punti fissi $P_0, P_1, \dots, P_n$ tali che i vettori $\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}$ (n vettori) di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti. Allora $f = \text{id}_{\mathbb{E}^n}$.

Dim. Dobbiamo dimostrare che non esiste alcun iperpiano H di $\mathbb{E}^n$ contenente $P_0, P_1, \dots, P_n$. Questo ^{equivale al fatto} significa che non esiste nessuna equazione del tipo

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = d \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$$

soddisfatta dalle coordinate di ciascuno P_i

$$\text{Sia } P_i(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}) \quad i=1, \dots, n. \quad 1/12/16 \quad (7)$$

allora

$$\begin{cases} a_1 p_{i1} + a_2 p_{i2} + \dots + a_n p_{in} = d \\ a_1 p_{o1} + a_2 p_{o2} + \dots + a_n p_{on} = d \end{cases} \quad \begin{cases} \text{sono entrambe soddisf.} \\ \forall i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1(p_{i1} - p_{o1}) + a_2(p_{i2} - p_{o2}) + \dots + a_n(p_{in} - p_{on}) = d - d = 0$$

È soddisfatta $\forall i=1, \dots, n$

Ma

$$\vec{P_0 P_i} = \begin{pmatrix} p_{i1} - p_{o1} \\ \vdots \\ p_{in} - p_{on} \end{pmatrix} \quad \forall i$$

Quindi il S.L. omogeneo $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ ha le n soluzioni $\vec{P_0 P_1}, \dots, \vec{P_0 P_n}$, che sono linearmente indep.

$$\Rightarrow \text{rg}[a_1, a_2, \dots, a_n] = 0, \text{ cioè } \underline{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0}.$$

COROLLARIO

Se $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ è un'isometria con tre punti uniti non-allineati, allora $f = \text{id}_{\mathbb{E}^2}$.

$f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ isometria

7/5/2013

(1)

- o $\boxed{f = id}$ oppure esiste $A : f(A) = A' \neq A$ ("AUT")

r : asse del segmento AA'

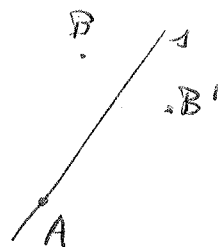
$\sigma_r \circ f$ isometria con A come punto unito

- o $\sigma_r \circ f = id \xrightarrow{\sigma_r^{-1} = \sigma_r} f = \sigma_r \circ \sigma_r \circ f = \sigma_r \circ id = \sigma_r \quad \boxed{f = \sigma_r}$

o esiste B t.c. $\left. \begin{array}{l} (\sigma_r \circ f)(B) = B' \neq B \\ (\sigma_r \circ f)(A) = A \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{B \neq A}}$

s : asse del segmento BB'

$$\overline{AB} = \overline{(\sigma_r \circ f)(A)(\sigma_r \circ f)(B)} = \overline{AB'} \Rightarrow \underline{\underline{A \in s}}$$



$\Rightarrow \sigma_s \circ \sigma_r \circ f$ isometria con A, B come punti uniti.

$\Rightarrow$ ogni punto della retta AB è unito per $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f$.

- o $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f = id \Rightarrow \boxed{f = \sigma_r \circ \sigma_s}$ (nota l'ordine delle σ)

oppure esiste C tale che $(\sigma_s \circ \sigma_r \circ f)(C) = C' \neq C \Rightarrow$

$\Rightarrow C \notin AB$ perché altrimenti sarebbe unito per $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f$.

- Indicare la retta AB con t per brevità

A, B punti uniti per $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f \Rightarrow$ sia A che B

appartengono all'asse del segmento CC' . $\Rightarrow t$ è tale asse

$\Rightarrow \sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r \circ f$ ha $\underbrace{A, B, C}_{\text{aff. indep.}}$ come punti uniti

$\Rightarrow \sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r \circ f = id$