AMMORTAMENTI A RATE ANTICIPATE

Sia l'operazione regolata secondo la legge della capitalizzazione composta con **tasso di interesse periodale** i coerente con la periodicità di pagamento delle rate.

$+S-R_0$	$-R_1$	$\dots$	$-R_{m-1}$	
0	1	$\dots$	m-1	

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}=\{S-R_0,-R_1,-R_2,\dots,-R_{m-1}\}/\{0,1,2,\dots,m-1\}$$

con $\quad R_k=C_k+I_k \quad k=0,1,\dots,m-1$ **rate d'ammortamento**

$C_k \quad k=0,1,\dots,m-1$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=0}^{m-1} C_k=S$

I_k **quota interesse** maturata in $[k,k+1]$ è pagata in k, $k=0,1,\dots,m-1$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0,\boldsymbol{x})=0 \quad \Leftrightarrow \quad S-\sum_{k=0}^{m-1} R_k(1+i)^{-k}=0$$

Se $I_0>0$ e $C_0=0$ si ha l'**ammortamento con anticipazione degli interessi**.

Restituzione del capitale in unica soluzione e pagamento periodico degli interessi anticipati

Consideriamo il caso:

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0 \qquad\qquad C_m = S$$

in cui si ha la restituzione del capitale in unica soluzione, a scadenza.

Si ha

$$I_k = i \cdot S \cdot (1+i)^{-1} = d \cdot S \,, \qquad k = 0, \ldots, m-1;$$

quindi $\quad R_k = d \cdot S \,, \quad k = 0, \ldots, m-1; \qquad R_m = S$

L'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S - d \cdot S, -d \cdot S, \ldots, -d \cdot S, -S\}/\{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$$

è equa.

Osservazione: interpretazione finanziaria per la formula

$$\ddot{a}_{\overline{m|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - d \cdot \ddot{a}_{\overline{m|}\,i} - (1+i)^{-m} = 0$$

può essere interpretata come condizione di equità per l'operazione finanziaria

$$\{1-d, -d, -d, \ldots, -d, -1\}/\{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k = 1, \ldots, m-1$.

Qual è la somma D_k^- da pagare in k, prima di pagare la rata esigibile in k, per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y} / \boldsymbol{s} = \left\{ S - d \cdot S, -d \cdot S, -d \cdot S, \ldots, -d \cdot S, -D_k^- \right\} / \left\{ 0, 1, 2, \ldots, k-1, k \right\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^k - (d \cdot S)\ddot{s}_{\overline{k|}\, i} - D_k^- = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_k^- = S$$

Si definisce D_k^- **debito residuo** in k prima del pagamento della rata R_k , $k = 0, \ldots, m$

$$D_k^- = S \qquad k = 0, \ldots, m$$

$$D_{m+1}^- = 0$$

Osservazione

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in t con $k-1<t<k$.

Qual è la somma X da pagare in t per chiudere l'operazione, mantenendo la condizione di equità?

Sia

$$\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S-d\cdot S,-d\cdot S,-d\cdot S,\ldots,-d\cdot S,-X\}/\{0,1,2,\ldots,k-1,t\}$$

l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(t,\boldsymbol{y})=0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^t-(d\cdot S)s_{\overline{k|}\,i}(1+i)^{t-k+1}-X=0 \quad \Leftrightarrow \quad X=M(t,\boldsymbol{x})$$

Quindi il debito residuo coincide con il montante.

Si noti che

$$X=S(1+i)^{-(k-t)}.$$

Se $t=k$, l'estinzione avviene prima del pagamento della quota interesse in k e si ha $X=S$, ma non si ha più $X=M(k,\boldsymbol{x})$. Infatti, per definizione, la valutazione del montante in k è fatta dopo, e non prima, del pagamento della quota interesse esigibile in k.

Ammortamento progressivo a rate anticipate

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \dots, -R_{m-1}\}/\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

con $R_k = C_k + I_k \qquad k = 0,1,\dots,m-1$ **rate d'ammortamento**

$C_k \quad k = 0,1,\dots,m-1$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=0}^{m-1} C_k = S$

I_k **quota interesse** maturata in $[k, k+1]$ e pagata in k, $k = 0,1,\dots,m-1$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0,\boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=0}^{m-1} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

Si definisce D_k^- **debito residuo** in k prima del pagamento della rata R_k , $k = 0,1,\dots,m-1$

$$D_k^- = S - \sum_{h=0}^{k-1} C_h = \sum_{h=k}^{m-1} C_h \qquad k = 1,\dots,m-1$$

$$D_0^- = S\,, \quad D_m^- = 0$$

La quota interessi I_k matura nell'intervallo $[k, k+1]$ sul debito residuo D_{k+1}^-

$$I_k = d\, D_{k+1}^- \qquad k = 0,1,\dots,m-1$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k = 1, \ldots, m-1$.
Qual è la somma X da pagare in k, prima di aver pagato la rata R_k, per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{k-1}, -X\}/\{0, 1, 2, \ldots, k-1, k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_{k-1}(1+i) - X = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_{k-1}(1+i)$$

Per mantenere il legame tra debito residuo e montante anche negli ammortamenti a rate anticipate è necessario modificare la definizione di montante.

Si definisce **montante** in k dell'operazione di ammortamento $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$, valutato prima del pagamento della rata R_k esigibile in k

$$M^-(k, \boldsymbol{x}) = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_{k-1}(1+i) \qquad k = 1, \ldots, m$$

$$M^-(0, \boldsymbol{x}) = S$$

Quindi il montante è la somma da pagare per estinguere anticipatamente il prestito.

Se $k < t < k+1 \;\Rightarrow\; M^-(t, \boldsymbol{x}) = M(t, \boldsymbol{x})$ è la somma da pagare in t per estinguere il prestito.

Proviamo che il debito residuo

$$D_k^- = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{k-1} \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

coincide con il montante

$$M^-(k, \boldsymbol{x}) = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_{k-1}(1+i) \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

È inoltre

$$M^-(0, \boldsymbol{x}) = S = D_0^-$$

<u>Lemma</u>: relazione ricorrente per il montante

Si ha

$$M^-(k+1, \boldsymbol{x}) = \left(M^-(k, \boldsymbol{x}) - R_k\right)(1+i)$$

Proviamo che

$$M^-(k, \boldsymbol{x}) = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{k-1} = D_k^- \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

Si dimostra per induzione.

Base: $M^{-}(m,\boldsymbol{x}) = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{m-1} = D_m^{-} = 0$

Passo induttivo:

se $M^{-}(k+1,\boldsymbol{x}) = S - C_0 - \ldots - C_k = D_{k+1}^{-}$ allora $M^{-}(k,\boldsymbol{x}) = S - C_0 - \ldots - C_{k-1} = D_k^{-}$

Dalla relazione ricorrente per il montante, e sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha

$$
\begin{aligned}
M^{-}(k,\boldsymbol{x}) &= D_{k+1}^{-}(1+i)^{-1} + R_k = D_{k+1}^{-} v + C_k + I_k \\
&= D_{k+1}^{-} v + C_k + d\, D_{k+1}^{-} = D_{k+1}^{-} v + C_k + i\, v\, D_{k+1}^{-} = D_{k+1}^{-} + C_k
\end{aligned}
$$

Poiché

$$D_{k+1}^{-} = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_k$$

si ha

$$M^{-}(k,\boldsymbol{x}) = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_k + C_k = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{k-1} = D_k^{-}$$

È così provato il passo induttivo.

Riassumendo,

$$I_k = d\, D^-_{k+1} \qquad k = 0,1,\ldots,m-1$$

con

$$D^-_{k+1} = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_k\ , \qquad k = 0,1,\ldots,m-1 \qquad \text{e} \qquad D^-_0 = S$$

Inoltre

$$D^-_k = M^-(k,\boldsymbol{x}) \qquad k = 0,\ldots,m$$

Essendo

$$M^-(k,\boldsymbol{x}) = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_{k-1}(1+i) \qquad k = 1,\ldots,m$$

$$M^-(0,\boldsymbol{x}) = S$$

Posto

$$V^-(k,\boldsymbol{x}) = -R_k - R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \ldots - R_{m-1}(1+i)^{-(m-1-k)}$$

Essendo

$$W(k,\boldsymbol{x}) = M^-(k,\boldsymbol{x}) + V^-(k,\boldsymbol{x}) \qquad \text{e} \qquad W(k,\boldsymbol{x}) = 0$$

si ha

$$D^-_k = M^-(k,\boldsymbol{x}) = -V^-(k,\boldsymbol{x}) \qquad k = 0,\ldots,m$$

Verifica della condizione di equità

Siano

$C_k \quad k = 0,1,\ldots,m-1$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=0}^{m-1} C_k = S$

$I_k \quad k = 0,1,\ldots,m-1$ **quote interesse** con $I_k = d\, D_{k+1}^{-}$

essendo

$$D_k^{-} = S - \sum_{h=0}^{k-1} C_h = \sum_{h=k}^{m-1} C_h \qquad k = 1,\ldots,m-1$$

$$D_0^{-} = S\,,\quad D_m^{-} = 0$$

il **debito residuo** in k prima del pagamento della rata R_k , $k = 0,1,\ldots,m-1$

Risultano così assegnate le **rate d'ammortamento**

$$R_k = C_k + I_k \qquad k = 0,1,\ldots,m-1$$

Proviamo che l'operazione

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{m-1}\}/\{0,1,2,\ldots,m-1\}$$

soddisfa la condizione di equità: $W(0,\boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=0}^{m-1} R_k (1+i)^{-k} = 0$

Dalla relazione ricorrente per il montante

$$M^{-}(k+1,\boldsymbol{x})=\left(M^{-}(k,\boldsymbol{x})-R_k\right)(1+i)$$

si ha

$$R_k=M^{-}(k,\boldsymbol{x})-M^{-}(k+1,\boldsymbol{x})(1+i)^{-1}=D_k^{-}-D_{k+1}^{-}(1+i)^{-1}$$

quindi

$$R_k(1+i)^{-k}=D_k^{-}(1+i)^{-k}-D_{k+1}^{-}(1+i)^{-(k+1)}$$

Sommando si ottiene

$$\sum_{k=0}^{m-1}R_k(1+i)^{-k}=\sum_{k=0}^{m-1}D_k^{-}(1+i)^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}D_{k+1}^{-}(1+i)^{-(k+1)}=D_0^{-}-D_m^{-}(1+i)^{-m}=D_0^{-}=S$$

È così provata la condizione di equità.

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue anticipate e quote capitali pari rispettivamente a 30.000, 2.000, 10.000 e 8.000 euro.

Ammortamento con anticipazione degli interessi

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{m-1}\}/\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

con $R_0 = I_0$

$R_k = C_k + I_k \qquad k = 1, \ldots, m-1$

$C_0 = 0, \quad C_k \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$ tali che $\sum_{k=1}^{m-1} C_k = S$

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue con anticipazione degli interessi e quote capitali pari rispettivamente a 5.000, 10.000, 20.000 e 15.000 euro.

Esempio (ammortamento tedesco):

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue con anticipazione degli interessi e quote capitali costanti posticipate.