Esercizi n. 6

1) Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

i) $u'' - 3u' + 2u = f(t)$,

ii) $u'' - u = f(t)$,

iii) $u'' - u' = f(t)$,

dove $f(t) = t^2,\ e^t,\ te^t,\ te^{-2t},\ \cos t,\ t\sin t,\ e^{-t}\cos t,\ te^{-t}\cos t$.

2) (Criterio dell'asintoto orizzontale) Sia $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che:

- esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
- esiste il $\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$.

Allora $l = 0$.

3) Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

i) $u'' - u' + u = f(t)$,

ii) $u'' - 2u' + u = f(t)$,

iii) $u'' + 4u = f(t)$,

dove $f(t) = t^2,\ e^t,\ te^t,\ te^{-2t},\ \cos t,\ t\sin t,\ e^{-t}\cos t,\ te^{-t}\cos t$.

4) Studiare qualitativamente le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare di x_0 in $\mathbb{R}$, determinandone il dominio massimale, le proprietà di monotonia e di convessità.

5) Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

i) $u''' + u = f(t)$,

ii) $u''' - 6u'' + 12u' - 8u = f(t)$,

iii) $u^{(4)} + u = f(t)$,

dove $f(t) = t^2,\ e^t,\ te^t,\ te^{-2t},\ \cos t,\ t\sin t,\ e^{-t}\cos t,\ te^{-t}\cos t.$

6) Dimostrare che tutte le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^6 \cos x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

sono definite su tutto $\mathbb{R}$, nonostante il secondo membro non sia sublineare.

7) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' + \omega^2 x = 2\sin(2t);$$

al variare di $\omega \in]0, +\infty[$.

8) Siano $f,\ g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ due funzioni tali che $xf(x,y) = -yg(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che tutte le soluzioni massimali del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
Hint: come varia la norma quadra delle soluzioni rispetto a t?

9) Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u = \cos x + 1.$$

Si determinino i valori del parametro reale a per i quali tutte le soluzioni di

$$u'' + 4u = \cos(ax) + a$$

sono limitate in $\mathbb{R}$.

10) Dimostrare che le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -xe^{xy} \\ y' = -ye^{xy} \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sono definite su tutta la semiretta $[t_0, +\infty)$.

11) Sia $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dimostrare che h è un integrale primo per il sistema

$$\begin{cases} x' = \partial_y h(x,y) \\ y' = -\partial_x h(x,y) \end{cases}$$

Utilizzare questo risultato per disegnare nel piano delle fasi le traiettorie dei sistemi

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y \\ y' = -4x \end{cases}$$

12) Mostrare che tutte le soluzioni di $2xx' = 1 + x^4$ esplodono in tempo finito.

13) Dimostrare il seguente risultato di confronto: siano $f_1, f_2 \in C(I \times \mathbb{R})$ due funzioni lipschitziane su I intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano $x_1, x_2 \in C^1(I)$ tali che

$$\begin{cases} x_1'(t) \leq f_1(t, x_1(t)) \\ x_2'(t) \geq f_2(t, x_2(t)) \\ f_1(t, x_1(t)) \leq f_2(t, x_2(t)) \end{cases}$$

per ogni $t \in I$.
Fissato $t_0 \in I$, dimostrare che valgono le seguenti implicazioni:

i) $x_1(t_0) \leq x_2(t_0) \Rightarrow x_1(t) \leq x_2(t)$ per ogni $t \geq t_0$;

ii) $x_1(t_0) \geq x_2(t_0) \Rightarrow x_1(t) \geq x_2(t)$ per ogni $t \leq t_0$;