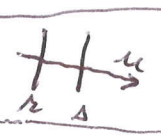
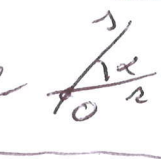
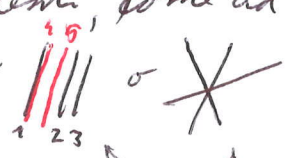


Nella volta scorsa: ogni isometria di $\mathbb{E}^2$ si ottiene componendo al più tre simmetrie ortogonali rispetto a rette opportune. Si ottiene la seguente classificazione:

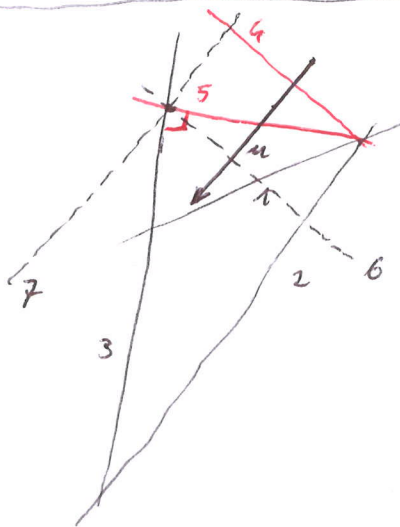
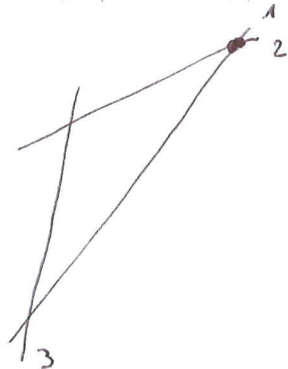
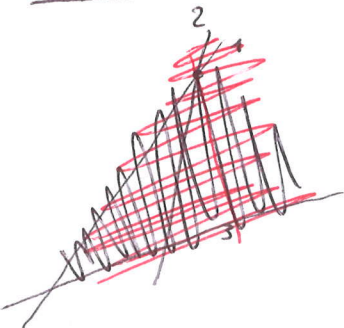
# simmetrie ortogonali	punti fissi?	isometria
0	ogni punto di $\mathbb{E}^2$	$i_{\mathbb{E}^2}$
1 σ_r	ogni punto della retta r	simmetria ortogonale rispetto alla retta r
2 $\sigma_\Delta \circ \sigma_r$	$r \parallel \Delta, r \neq \Delta$	traslazioni 
	$r \cap \Delta = \{O\}$	rotazioni attorno ad O di un angolo $\frac{2\pi}{2\alpha}$ 

3 (non riconducibile a qualcuno dei casi precedenti, come ad esempio 

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE: la coppia di rette che fornisce una data rotazione non è unica. Analogha osservazione vale per le traslazioni. Questa osservazione si usa così:

Ultimo caso:

$$\sigma_3 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)$$



$$\begin{aligned} \sigma_3 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1) &= \\ &= \sigma_3 \circ (\sigma_5 \circ \sigma_4) = \\ &\quad \text{con } \underline{\sigma_1 \perp \sigma_3} \\ &= (\sigma_3 \circ \sigma_5) \circ \sigma_4 = \\ &= (\sigma_2 \circ \sigma_6) \circ \sigma_4 \\ &\quad \text{con } \underline{6 \parallel 4} \end{aligned}$$

Osserviamo che, per costruzione, la retta 7 è ortogonale sia a 6 che a 4.

Allora la nostra isometria si ottiene componendo la traslazione di vettore u con la simmetria ortogonale rispetto alla retta 7. Si osservi che u è un generatore della direzione di 7.

questa traslazione si chiama GLISSOSIMMETRIA; non ha punti uniti.

Analizziamo il tutto da un altro punto di vista.

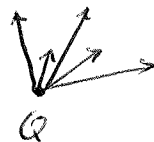
Ricordiamo che, se $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ è un'isometria, allora esiste (ed è unica) un'applicazione lineare $f_*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che, fissato comunque $Q \in \mathbb{E}^n$, allora $\forall P \in \mathbb{E}^n$ si ha $f(P) = f(Q) + f_*(\overrightarrow{QP})$.

Se possibile, conviene scegliere come Q un punto unito ~~minimo~~ per f (se esiste...). In tal caso conviene anche "piazze" l'origine (il vettore nullo) in Q , nel seguente modo:

Se $Q(q_1, \dots, q_n)$, sia $u \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -q_1 \\ \vdots \\ -q_n \end{bmatrix}$ e si consideri τ_u , la traslazione di vettore u .

Allora $\tau_u(Q) = (0, 0, \dots, 0)$, l'origine.

L'idea è, quindi, di "applicare" tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ in Q . Pensando le cose da questo punto di vista, Q funziona da vettore nullo.



In ogni caso, se g è un'altra isometria di $\mathbb{E}^n$, è facile vedere che

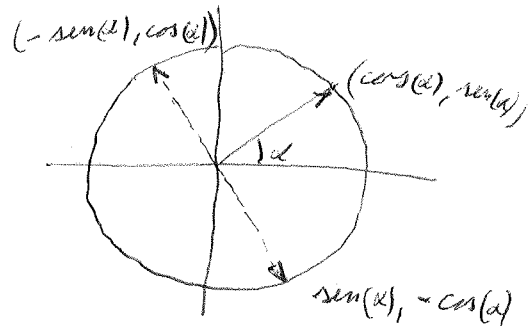
$$(1) \quad \boxed{(g \circ f)_* = g_* \circ f_*}$$

Ricordiamo poi che abbiamo anche fissato una base ON B di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\langle -, - \rangle$, fissata pure lui). Rispetto a B f_* si rappresenta con una matrice A invertibile, d. c.

${}^tAA = I_n$. Una tale A è detta matr. ortogonale. Un modo diverso di dire la condizione ${}^tAA = I_n$ è dire che le colonne di A formano una base ON di $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ deve essere un vettore: } a^2 + c^2 = 1$$

Dunque esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$



Ora $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ deve essere un vettore, e deve essere ortogonale ad $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$. Quindi per $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

vi sono solo due possibilità. Pertanto anche per A vi sono

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

oppure $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1$$

A non ha autovalori reali.

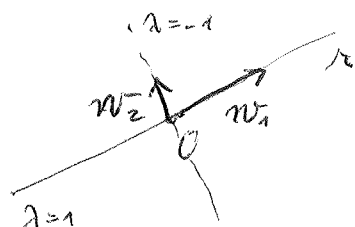
matrice di una rotazione di un angolo α attorno all'origine, in verso orario

$$\det(A) = -1$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

A è diagonalizzabile
matrice di una simmetria
ortogonale rispetto ad una
retta r .

Se si prende un punto di r (è p.t. unito per f) come origine O' , allora in coordinate $f = f_*$.



r è l'autospazio relativo all'autovalore 1. È possibile ricavare da A la sua direzione.

Rispetto ad una base w_1, w_2 di $\mathbb{R}^2$

formata da autovettori (w_1 risp $\lambda=1$, w_2 risp $\lambda=-1$) allora f è dato da

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

5/12/16

(4)

Ricordiamo che per ogni traslazione $\mathcal{E}_u$ si ha $(\mathcal{E}_u)_* = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$

Dunque, nel caso $n=2$, $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ è anche la matrice di ogni glissosimmetria.

Riassumendo

$$\text{id}_{\mathbb{R}^2} \quad (\text{id}_{\mathbb{R}^2})_* = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1$$

(1)

simm. ortog.
risp. retta

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \det(A) = -1$$

traslazioni $(\mathcal{E}_u)_* = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1 = (-1)^2$$

rotazioni

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1 = (-1)^2$$

glissosimmetria

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \det(A) = -1 = (-1)^3$$

ESERCIZIO Studiare l'applicazione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ data rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane da

$$\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x + 2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} = f\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) \quad \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right) - f\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$f(P) \quad f(Q) \quad "f_*" \quad P - Q = \vec{QP}$$

Le colonne di A formano una base ON (risp. $\{e_1, e_2\}$)

Dunque f è un'isometria. $\det(A) = -1$; allora f è una simmetria ortogonale rispetto ad una opportuna retta, oppure f è una glissosimmetria. Per scoprire quale

5/12/16

(5)

non possiamo studiare i punti uniti di f SPICCA.

$$\begin{cases} x = y + 4 \Rightarrow x - y = 4 \\ y = x + 2 \Rightarrow x - y = -2 \end{cases} \text{ assurdo, dunque } f \text{ non ha punti uniti.}$$

$\rightarrow f$ è una glissosimmetria.

Per capire f "geometricamente" devo trovare la retta r ed il vettore u tali che $f = \sigma_r \circ \tau_u (= \tau_u \circ \sigma_r, \text{verificarlo!})$

Osservo che $f: r \rightarrow r$ ^{SPICCA}, cioè la retta è invariante per f , ma non "punto per punto". Cioè, se (x, y) soddisfa $y = mx + q$, allora deve valere anche $y' = mx' + q$. Quindi:

$$x + 2 = m(y + 4) + q \stackrel{\substack{\text{per} \\ y = mx + q}}{=} m(mx + q + 4) + q \Rightarrow \underbrace{(m^2 - 1)x = 2 - mq - 4m - q}_{\text{deve essere soddisfatta } \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2 - mq - 4m - q = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$$

$m = 1 \quad 2 - q - 4 - q = 0 \Rightarrow q = -1$
 $m = -1 \quad 2 + q + 4 - q = 0 \Rightarrow 6 = 0 \text{ assurdo}$

La retta cercata è $y = x - 1$ r

$$r \ni \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{f} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \in r \quad u = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

A matrice $n \times n$ ortogonale. ${}^t A \cdot A = I_n \Rightarrow$

$$1 = \det(I_n) = \det({}^t A A) = \det({}^t A) \cdot \det(A) = \det(A)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\det(A) = \pm 1}$$

Le isometrie per le quali $\det(A) = +1$ si chiamano ISOM. DIRETTE o anche MOVIMENTI RIGIDI. Le altre sono dette isometrie inverse.

ESEMPIO

$H \subset \mathbb{R}^n$ iperpiano: è l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$\text{ovvero } a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

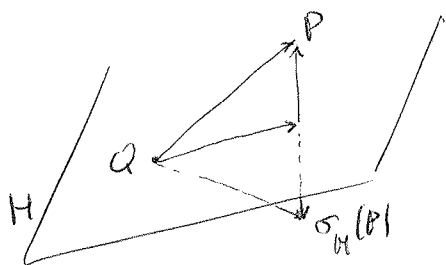
$$(a_1, \dots, a_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

La sua giacitura $W \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale è l'insieme delle soluzioni di $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$
 $\dim(W) = n-1$.

Immaginiamo di prendere come base ON B di $\mathbb{R}^n$ una base ON $v_1, \dots, v_{n-1}$ di W , e di completarla ad una base ON di $\mathbb{R}^n$ $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$.

Se $Q \in H$ e se σ_H è la simmetria ortogonale risp. all'iperpiano H , allora $\sigma_H(Q) = Q$. Inoltre si ha, grazie alla scelta di B :

$$\sigma_H(P) = \sigma_H(Q) + (\sigma_H)_* (\vec{PQ}) = Q + \begin{bmatrix} I_{n-1} & \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{n-1} \end{bmatrix} \\ \hline 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ se } \vec{PQ} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix}$$



$$\det \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

ISOMETRIE DIRETTE di $\mathbb{E}^3$

$f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ isometria diretta ($\det(f) = 1$), $f \neq \text{id}_{\mathbb{E}^3}$. Due casi

- f ha un punto unito.
- f non ha un punto unito.

TEOREMA DI EULERO (tratta il primo caso)

$f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ isometria diretta, $f \neq \text{id}_{\mathbb{E}^3}$ e sia $O \in \mathbb{E}^3$ t.c. $f(O) = O$. Allora esiste una retta r passante per O tutta formata da punti uniti per f , ed f è la rotazione attorno ad r ("l'asse r ") di un angolo α .

Dim. Supponendo come al solito che O sia il vettore nullo, f si scrive in coordinate come f_* :

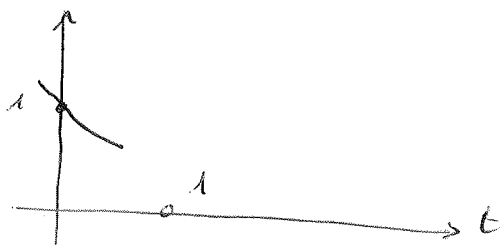
5/12/16

(7)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con A matrice ortogonale, con $\det(A) = 1$.

$$p_A(t) = -t^3 - 1$$



Per il Teorema del valore intermedio in Analisi, $p_A(t)$ ammette almeno una radice reale, $\Rightarrow$.

LEMMA Se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un automorfismo ortogonale, cioè $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, allora gli unici autovalori possibili per φ sono ± 1 .

Dim.

Sia $u \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo all'autovalore λ .

È lecito supporre che $\|u\| = 1$. Allora:

$$1 = \langle u, u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle = \lambda^2 \quad \lambda^2 = 1$$

Allora chiaramente $p_A(\lambda) = 0$.

Sia $u \in \mathbb{R}^3$ un autovettore relativo all'autovalore 1.

$u \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow U = \text{Span}(u)$ per f_* è t.c. $\dim(U) = 1$.

INTERESS.
&
IMPORT.

Sia $H := U^\perp$ $\dim(H) = 3 - 1 = 2$.

$w \in H \Leftrightarrow \langle u, w \rangle = 0$ f_* conserva i prodotti scalari:

$$0 = \langle u, w \rangle = \langle f_*(u), f_*(w) \rangle = \langle 1 \cdot u, f_*(w) \rangle \Rightarrow f_*(w) = f_*(w) \circ H$$

Così $f|_H: H \rightarrow H$ e $f|_H$ è ancora un'isometria.

Se B' è una base ON di H , allora $B' \cup \{u\}$ è base ON di $\mathbb{R}^3$. Rispetto a tale base la matrice che rappresenta f_* è

5/12/16

(8)

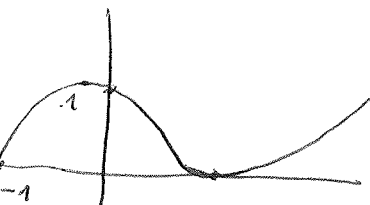
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & B & \end{pmatrix}$$

e B è matrice 2×2 ortogonale.

Oppure $B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ o $B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Nel secondo caso A sarebbe simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ SPIEGARE.

si avrebbe $p_A(t) = -(t-1)^2(t+1)$ e -1 avrebbe mult. algebrica $= 2$. Ma in tal caso



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_A(t) = +\infty, \text{ assurdo!}$$

Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

SPIEGARE

Binale alternativo.

B base ON di $\mathbb{R}^3$ data in partenza. $A = M_B^B(f_*)$. $\det(A) = 1$.

Facciamo un cambiamento di base, da B a B' , con B' ancora ON. B' è formata da

$\frac{u}{\|u\|}$, w_1, w_2 dove w_1, w_2 è una base ON di H .

$$B = (v_1, v_2, v_3)$$

$$P = M_{B'}^B(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\|u\|} \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

è la matrice ortogonale

$$P^{-1} = {}^t P \Rightarrow \det(P^{-1}) = \det({}^t P) = \det(P)$$

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} M_{B'}^{B'}(f_*) = P A P^{-1} \Rightarrow \det(A') = \underbrace{\det(P)}_{=1}^2 \underbrace{\det(A)}_{=1} = 1$$

$\det(B)$

TEOREMA

$f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ sia isometria diretta, $f \neq \text{id}_{\mathbb{E}^3}$ priva di punti fissi. Allora f è una rototraslazione: $f = \tau_v \circ \rho$. La direzione dell'asse di rotazione e l'angolo di rotazione sono univocamente determinati.

Dim.

$A \in \mathbb{E}^n$ arbitrario. $A' = f(A) \neq A$ perché f non ha punti fissi.

Sia $v = \overrightarrow{A f(A)} = f(A) - A$. τ_{-v} è isometria diretta, quindi:

$\tau_{-v} \circ f$ è isometria diretta $(\tau_{-v} \circ f)(A) = A$.

Se $\tau_{-v} \circ f = \text{id}$, allora $f = \tau_v$ (non c'è rotazione).

Altrimenti $\tau_{-v} \circ f \neq \text{id}$ e posso applicare il TdE:

$$\tau_{-v} \circ f = \rho \Rightarrow \underline{f = \tau_v \circ \rho}.$$

Se $f = \tau_w \circ \rho'$, allora $\tau_v \circ \rho = \tau_w \circ \rho' \Rightarrow \rho = \tau_{-v} \circ \tau_w \circ \rho'$

$$\Rightarrow \rho = \tau_{w-v} \circ \rho' \Rightarrow \rho_* = (\tau_{w-v} \circ \rho')_* = \underbrace{(\tau_{w-v})_*}_{= \text{id}_V} \circ \rho'_* = \rho'_*$$

$\rho_* = \rho'_* \Rightarrow$ la direzione dell'asse di rotazione e l'angolo di rotazione sono univocamente determinati. ■