

Per risolvere alcune situazioni delicate abbiamo bisogno di usare i numeri complessi, essenzialmente per poter usare il "Teorema Fondamentale dell'Algebra": ogni polinomio a coeff. complessi, di grado ≥ 1 , ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.

~ o ~

Quel che vogliamo fare adesso è vedere come si possa adattare la definizione di prodotto scalare al caso dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ sul campo $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \quad \left| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right| \quad z_h \in \mathbb{C} \quad z_h = x_h + iy_h \quad x_h, y_h \in \mathbb{R} \quad \forall h=1, \dots, n$$

SOMMA in $\mathbb{C}^n$

$$\left| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{matrix} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \begin{matrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{matrix} \right|$$

PRODOTTO di un vettore di $\mathbb{C}^n$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda \left| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \begin{matrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{matrix} \right|$$

funziona tutto come su $\mathbb{R}$ e dip. e indep. lineari, comb. lineari, basi, dimensioni, matrici, determinanti, appl. lineari, autovalori, autovettori...

~ o ~

Ricordiamo che un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che è BILINEARE, SIMMETRICA, DEFINITA POSITIVA. Cerchiamo "qualcosa di analogo" su $\mathbb{C}^n$.

Partiamo dall'ultima condizione:

DEFINITA POSITIVA (su $\mathbb{R}$) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Il problema con i numeri complessi è che non esiste in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con le operazioni

$$z < z' \Rightarrow z + w < z' + w \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

$$z < z', w > 0 \Rightarrow wz < wz'$$

Il problema è che non è proprio possibile definire

che cosa dovrebbe intendersi per un numero complesso > 0 .

Qualche "experiment": supp. $0 < 1$. Se $i > 0$, allora $0 = 0 \cdot i < i$

allora $0 < i^2 = -1$, cioè $0 < -1$. Comunque i numeri non hanno un'ordine.

Sarebbe indispensabile per poter avere la proprietà DEF. POSITIVO che $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ fosse tale che

$$\langle u, u \rangle \in \mathbb{R} \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{C}^n.$$

Per questo è sufficiente modificare leggermente la def. di simmetria:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad (*) \quad \underbrace{\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}}_{\text{OK}} \quad \begin{array}{l} \text{il complesso coniugato} \\ \text{SIMMETRIA} \\ \text{HERMITIANA} \end{array}$$

Infatti, in tal caso

$$\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle} \iff \langle u, u \rangle \in \mathbb{R} \quad \text{e allora si può richiedere che valga la cond. DEF. POS., enunciata nel solito modo.}$$

La (*) ha conseguenze ~~sulla~~ sulla bilinearità. Siam liberi di chiedere che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sia $\mathbb{C}$ -lineare nel primo argomento:

$$\begin{aligned} \text{Per ogni } v \in \mathbb{C}^n \quad & \langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle \quad \forall u, u' \in \mathbb{C}^n \\ & \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \langle u, v + v' \rangle &= \overline{\langle v + v', u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle + \langle v', u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle v', u \rangle} = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{z}} = z \end{array} \right.$$

MA:

$$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$$

Quindi, volendo tenere la proprietà (*) non possiamo richiedere che $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sia BI-lineare, ma solo

$$\begin{aligned} \text{SL1)} \quad & \langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle \\ \text{SL2)} \quad & \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \\ \text{SL3)} \quad & \langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle \\ \text{SL4)} \quad & \langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \forall \dots \\ \text{SCRIVERE!} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{queste le dovrai richie-} \\ \text{dere anche per la} \\ \text{BI-linearità} \end{array}$
solo questa è diversa

si dice che $\langle -, - \rangle$ è SESQUILINEARE (cioè 1,5-LINEARE, invece di 2-lineare = Bilinear).

Def. Un PRODOTTO SCALARE HERMITIANO su $\mathbb{C}^n$ è un'applicazione $\langle -, - \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ che gode delle seguenti proprietà:

1. SESQUILINEARITÀ [le (SL1), -- (SL4) di pag. precedente], ovvero $\langle -, - \rangle$ è $\mathbb{C}$ -lineare nel primo argomento e $\mathbb{C}$ -semilineare nel secondo argomento.
2. SIMMETRIA HERMITIANA $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n$
3. è DEFINITO POSITIVO $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{C}^n$ e $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0_{\mathbb{C}^n}$.

ESEMPIO: il pr. scal. herm. STANDARD di $\mathbb{C}^n$

$$v \in \mathbb{C}^n \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix} \quad \boxed{\langle u, v \rangle_{st} = {}^t u \bar{v}}$$

$$\text{Se } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \text{ allora } \langle u, v \rangle_{st} = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_m \bar{v}_m$$

Si verifica facilmente che valgono le proprietà richieste.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad (a \mapsto a + i \cdot 0 \in \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n \quad \& \text{ Allora, presi } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ si ha } \underline{\langle u, v \rangle_{st, \mathbb{R}} = \langle u, v \rangle_{st, \mathbb{C}}}$$

~ ~ ~

$\mathbb{C}^n$ con $\langle , \rangle$ pr. scal. herm. fissato è detto

SPAZIO (VETTORIALE) UNITARIO

E d'ora in poi lo sappremo

$(\mathbb{R}^n \text{ con } \langle , \rangle \text{ pr. scalare fissato è detto } \underline{\text{SPAZIO (VETT.) EUCLIDEO}})$

$$u \in \mathbb{C}^n \quad \|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$\|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathbb{C}^n}$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \sqrt{\lambda = a+ib \quad a, b \in \mathbb{R}} \quad \| \lambda u \| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle} = |\lambda| \cdot \|u\|$$

$$\lambda \bar{\lambda} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |\lambda|^2$$

Se $u, v \in \mathbb{C}^n$, la distanza tra u e v è $d(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \|u - v\|$

$$d(u, v) = d(v, u).$$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

Per ogni $u, v \in \mathbb{C}^n$ $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Vali " $=$ " $\Leftrightarrow u, v$ sono linearmente dipendenti.

Dim.

Presi comunque $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ si ha:

$$0 \leq \langle \lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle + \lambda \bar{\mu} \langle u, v \rangle + \mu \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \mu \bar{\mu} \langle v, v \rangle$$

Supponiamo $v \neq 0$ (se $v = 0$ la disug. di CS è verificata).

Allora $\langle v, v \rangle > 0$ e si può porre $\lambda = \langle v, v \rangle$ in

$$0 \leq \langle v, v \rangle^2 \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \bar{\mu} \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \mu \langle v, u \rangle + \mu \bar{\mu} \langle v, v \rangle$$

$$0 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + \mu \bar{\mu} + \bar{\mu} \langle u, v \rangle + \mu \langle v, u \rangle$$

Prendiamo in $\uparrow$ $\mu = -\langle u, v \rangle$; otteniamo:

$$0 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 + \langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle} - \langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle} - \langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle}$$

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{da C-S}$$

Si deduce che se u, v sono lin. dipendenti, allora vale " $=$ ".

Viceversa, se $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$, se $v = 0$ allora u, v sono lin. dipendenti. Se $v \neq 0$, posto come sopra $\lambda = \langle v, v \rangle$ e $\mu = -\langle u, v \rangle$ si ha che

$$\langle \lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda u + \mu v = 0$$



Def $u, v \in \mathbb{C}^n$ si dicono ortogonali se $\langle u, v \rangle = 0$

$v_1, \dots, v_m$ base arbitraria di $\mathbb{C}^m$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt} \\ \text{funziona nello stesso identico modo} \end{array} \right.$

$u_1, \dots, u_m$ base ON di $\mathbb{C}^m$

Il procedimento prevede anche $\text{Span}(u_1, \dots, u_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\forall k = 1, \dots, m$

$w \in \mathbb{C}^n$ arbitrario $w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ chi sono i " λ "?

$$\langle w, u_i \rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, u_i \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle u_1, u_i \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} + \dots$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_h = \langle w, u_h \rangle} \quad \forall h = 1, \dots, n$$

$E \subset \mathbb{C}^n$ sottospazio

$E^\perp = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \langle u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in E\}$ è sottospazio vett. di $\mathbb{C}^n$

$W \subset \mathbb{C}^n$ sottosp. vett. $\dim(W) = r$

$w_1, \dots, w_r$ base di W

$w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_m$ base di $\mathbb{C}^m$

$\downarrow$ GS

$u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m$ base ON

$$W = \text{Span}(u_1, \dots, u_r)$$

$$W^\perp = \text{Span}(u_{r+1}, \dots, u_m)$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W^\perp) = n - r$$

$\downarrow$ SOMMA DIRETTA ORTOGONALE

$$W \cap W^\perp = \{0\}$$

$$\underline{W \oplus W^\perp = \mathbb{C}^n}$$

Si ha anche la formula di POLARIZZAZIONE:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \langle u+v, u+v \rangle - \langle u-v, u-v \rangle + i \langle u+iv, u+iv \rangle - i \langle u-iv, u-iv \rangle \right\}$$

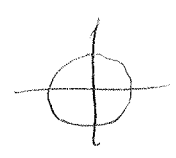
$\nearrow$ FARE

Def. $L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$ -lineare si chiama ENDOMORFISMO UNITARIO se $\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n$.

(nel caso reale: ENDOMORFISMO ORTOGONALE)

Proprietà di un endom. unitario:

1. $\|L(u)\| = \|u\| \quad \forall u \in \mathbb{C}^n$ (vale anche $1. \Rightarrow L$ è end. unitario, grazie alla form. di polarizzazione)
2. $u \perp v \Rightarrow L(u) \perp L(v)$
3. L è isomorfismo e L^{-1} è unitario.
4. Se λ è autovalore di L , allora $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1$



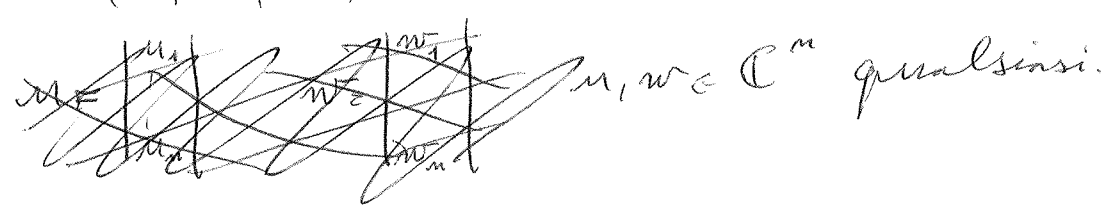
La dim. è come nel caso reale, o quasi: sia $u \in \mathbb{C}^n$ un autovettore relativo a λ . Allora

$$\|u\| = \|L(u)\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Sia $\mathcal{B}$ una base ON rispetto a $\langle, \rangle$.

Sia $L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ end. unitario. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = A$

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$$



$$u = z_1 v_1 + \dots + z_n v_n \quad w = w_1 v_1 + \dots + w_n v_n$$

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \langle z_1 v_1 + \dots + z_n v_n, w_1 v_1 + \dots + w_n v_n \rangle \stackrel{\text{prop. di } \langle, \rangle}{=} \\ &= z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n = |z_1 \dots z_n| \begin{vmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Allora L unitario $\Rightarrow \forall u, w \in \mathbb{C}^n$ (matrici colonna)

$${}^t U \overline{W} = \langle u, w \rangle = \langle E(u), L(w) \rangle = ({}^t H U) \overline{H W} = {}^t U {}^t H \overline{H} W$$

$$\forall U, \forall W \xrightarrow{\text{SPLT}} {}^t H \overline{H} = I_m \Rightarrow {}^t \overline{H} \overline{\overline{H}} = \overline{I_m} = I_m \quad \boxed{{}^t \overline{H} H = I_m}$$

H è invertibile e $H^{-1} = {}^t \overline{H}$ ←

Se una matrice $n \times n$, ad entrate in $\mathbb{C}$ verifica) si dice m. UNITARIA

In altro modo: considero il significato di H

H	$\begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$	$\ L(v_h)\ = \ v_h\ = 1$ $v_h \perp v_k \quad (h \neq k) \Rightarrow$ $L(v_h) \perp L(v_k)$ perché B è base ON
$L(v_1) \quad L(v_2) \quad \dots \quad L(v_n)$		

Quindi: le colonne di H formano una base ON rispetto a $\langle, \rangle_H$ in $\mathbb{C}^n$.