

FORME BILINEARI E FORME QUADRATICHE

$K$  un campo;  $R = \mathbb{C}$  (o  $\mathbb{Q}$ , ...)

$V$  spazio vettoriale su  $K$ , di dimensione finita  $n \geq 1$  ( $V \neq K^n$ )

I prodotti scalari sono casi particolari di

Def. Chiameremo FORMA BILINEARE ogni applicazione

$b: V \times V \rightarrow K$  tale che valgono  $\forall v, v', w, w' \in V \quad \forall \lambda \in K$

$$\text{FB1} \quad b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$$

$$\text{FB2} \quad b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w')$$

$$\text{FB3} \quad b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w) = b(v, \lambda w)$$

Osserviamo che se  $K = \mathbb{C}$ , un prodotto scalare hermitiano non è una forma bilineare perché FB3 non vale completamente.

Una forma bilin. si dice SIMMETRICA se

$$b(v, w) = b(w, v) \quad \text{per ogni } v, w \in V$$

$b$  si dice antisimmetrica se  $b(v, w) = -b(w, v) \quad \forall v, w \in V$ .

In quest caso si ha

$$b(v, v) = -b(v, v) \Rightarrow 2b(v, v) = 0 \xrightarrow{S} \underbrace{b(v, v) = 0}_{\forall v \in V}$$

Una forma bilineare che soddisfa quest'ultima condizione si dice alternante. Viceversa, se  $b$  è bilineare, alternante:

$$0 = b(v + w, v + w) = \underbrace{b(v, v)}_{=0} + b(v, w) + b(w, v) + \underbrace{b(w, w)}_{=0} \Rightarrow$$

$$b(v, w) = -b(w, v) \quad \text{e } b \text{ è anche antisimmetrica.}$$

ESEMPLI

1) La forma bilineare nulla:  $b(v, w) = 0 \quad \forall v, w \in V$ .

2)  $A$ : matrice  $n \times n$ , ad entrate in  $K$ .  $V = K^n$ , i vettori in  $V$  sono pensati come matrici colonna  $n \times 1$ . Allora

$$b(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} {}^t v A w \quad \forall v, w \in K^n \quad \text{è una forma bilineare.}$$

3)  $V$  quals.  $B=(v_1, \dots, v_n)$  base  $A$  matrice  $n \times n$  7/12/16 (2)  
data.  $K_B: V \rightarrow K^n \quad v \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Se  $e_1, \dots, e_n$  è la base canonica di  $K^n$ , allora si ha  
 $b(e_i, e_j) = {}^t e_i A e_j = a_{ij}$  (vist ieri, il Lemma).

$V$  qualsiasi,  $B=(v_1, \dots, v_n)$  una base ordinata di  $V$  fissata

$b: V \times V \rightarrow K$  f. bilineare arbitraria fissata

Allora mi posso costruire una matrice  $A$   $n \times n$  ponendo

$$a_{ij} \stackrel{\text{del}}{=} b(v_i, v_j)$$

La matrice  $A$  individua completamente la forma bilineare  $b$ . Infatti:

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \quad x_i, y_j \in K \quad \forall i, j$$

$$b(v, w) = b(x_1 v_1 + \dots, \overset{w}{\cancel{y_1 v_1 + \dots + y_n v_n}}) = \sum_{i=1}^n b(x_i v_i, w) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i b(v_i, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n \underbrace{b(v_i, v_j)}_{a_{ij}} y_j \right) = \dots$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i b(v_i, y_1 v_1) + \dots + \sum_{i=1}^n x_i b(v_i, y_n v_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(v_i, v_j) =$$

INTERPRETARE

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \right) y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \underset{x}{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \underset{y}{}$$

$b: V \times V \rightarrow K$  sia f. bilin. simmetrica

$B=(v_1, \dots, v_n)$  base qualsiasi di  $V$

$A$  la matrice che rappresenta  $b$  rispetto a  $B$ . Allora

$$a_{ij} = b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i) = a_{ji} \quad \forall i, j \quad \text{cioè} \quad \underline{A = {}^t A}$$

$b$  f. bilin. sim.  $\Rightarrow A$  è matrice simmetrica

Viceversa, supponiamo che la matrice  $A$  che rappresenta una f. bilin  $b: V \times V \rightarrow K$  rispetto ad una data base

$B=(v_1, \dots, v_n)$  sia simmetrica:  $A = {}^t A$ . Allora:

7/12/16 (3)

$$b(v, w) = |\lambda_1 \dots \lambda_n| A \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{vmatrix} = {}^t \left( |\lambda_1 \dots \lambda_n| A \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{vmatrix} \right) = {}^t y {}^t A x = {}^t y A x = \underbrace{{}^t y A x}_{= b(w, v)}$$

questo è uno scalare, cioè una matrice 1x1,  
quindi uguale alla sua trasposta

$$= |\mu_1 \dots \mu_n| {}^t A \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{vmatrix} = |\mu_1 \dots \mu_n| A \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{vmatrix} = b(w, v)$$

Riassumiamo quello che abbiamo ottenuto:

### PROPOSIZIONE

$V$  spazio vettoriale di dimensione  $n$  su  $K$ ,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  una base di  $V$  fissata. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutte le forme bilineari  $b: V \times V \rightarrow K$  e l'insieme di tutte le matrici  $n \times n$  ad entrate in  $K$

$$b \mapsto A \stackrel{\text{def}}{=} (b(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Tale biiezione induce una biiezione tra il sottoinsieme delle forme bilineari simmetriche (risp.: antisimmetriche) ed il sottoinsieme delle matrici simmetriche (risp.: antisimmetriche).

La corrispondenza nella proposizione precedente dipende dalla scelta della base  $B$  di  $V$ . Se  $\mathcal{B} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  è un'altra base di  $V$ , che relazione c'è tra le matrici  $A$  e  $B$  che rappresentano una data forma bilineare  $b: V \times V \rightarrow K$  rispetto alle basi  $B$  e  $\mathcal{B}$ ?

Consideriamo la matrice di cambiamento di base

$$P = M_{\mathcal{B}}^B(\text{id}_V) \quad \text{ricordiamo che } P \text{ "funziona" così:}$$

$v \in V$  arbitrario

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad x_h \in K \quad x'_h \in K$$

$$= \sum_{i=1}^n x'_i \mu_i + \dots + \sum_{i=1}^n x'_n \mu_n \quad \left[ \text{anche} \right]$$

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \quad x' = \begin{vmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{vmatrix}$$

$$\text{allora } x' y = P x$$

$$\begin{array}{ccc} & & K_B \rightarrow K^n \\ & \searrow & \downarrow LP \\ V & & K_B \rightarrow K^n \end{array}$$

7/12/16 (4)  
 Allora, se i vettori colonna  $y$  e  $y'$  rappresentano le coordinate di  $w \in V$  rispetto a  $B$  e  $B'$ , si ha

$${}^t x' \boxminus y' = {}^t (Px) \boxminus Py = {}^t x {}^t P \boxminus P y \quad \text{civè}$$

$$b(v, w) = {}^t x \boxminus y \quad {}^t x \boxminus y = {}^t x ({}^t P \boxminus P) y \quad \forall x, y \in K^n$$

Per il lemma visto ieri si ha, quindi

$$(*) \quad \boxed{A = {}^t P \boxminus P} \quad \text{con } P \text{ invertibile}$$

Def. Se due matrici  $A, B$ , entrambe  $n \times n$ , verificano la relazione  $(*)$  esse si dicono CONGRUENTI.

ESERCIZIO La relazione di congruenza tra matrici quadrate  $M_n(K)$   $n \times n$  è una relazione d'equivalenza nell'insieme di tutte le matrici quadrate  $n \times n$  ad entrate in  $K$ .  $\boxtimes$  Inserire PROP. da pag. (5)

ESERCIZIO Se  $P$  è matrice  $n \times n$  invertibile, allora  ${}^t P$  è anch'essa invertibile, e si ha  $({}^t P)^{-1} = {}^t (P^{-1})$ .

### PROPOSIZIONE

Matrici  $n \times n$  congruent hanno lo stesso rango.

Dim. Siano  $A, B$  matrici  $n \times n$ , e sia  $P$  matrice  $n \times n$  invertibile, t.c.  $A = {}^t P \boxminus P B$ .

$\text{rg}(B)$  è il max numero di colonne di  $B$  linearmente indipendenti:

$$\text{Quindi } \text{rg}(B) \stackrel{\text{SPEG.}}{=} \dim(\text{Im}(L_B)) \quad L_B: K^n \rightarrow K^n$$

Analogamente si ha:

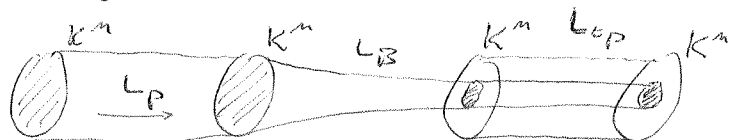
$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(L_A)) \quad \text{dove} \quad K^n \xrightarrow{L_A} K^n$$

Ora:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{L_A} & K^n \\ & \searrow L_P & \nearrow L_{tP} \\ & K^n \xrightarrow{L_B} K^n & \end{array} \quad \text{commutativo}$$

$P$  invertibile  $\Rightarrow L_P$  isomorfismo, quindi

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(L_B) = \text{Im}(L_B \circ L_P)$$



Ma per l'esercizio precedente, anche  ${}^tP$  è invertibile, quindi anche  $L_{{}^tP}$  è un isomorfismo. Allora

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(L_A)) = \dim(L_{{}^tP}(W)) \underset{\uparrow}{=} \dim(W) = \text{rg}(B)$$

SPIEGARE

vedi disegno alla fine di pag. precedente

PROP. (VA a pag. ④)

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ , di dimensione  $n$ . Due matrici  $A, B$   $n \times n$  ad entrate in  $K$  rappresentano la stessa forma bilineare su  $V$  rispetto a due diverse basi

$\Leftrightarrow A$  e  $B$  sono congruenti.

Def. Se una forma bilineare  $b: V \times V \rightarrow K$  è rappresentata risp. ad una base  $B$  di  $V$  dalla matrice  $A$ , allora chiameremo  $\text{rg}(A)$  il  rango della forma  $b$ .

La prop. precedente ci dice che il rango è ben definito.

$b$  si dirà non-degenera (risp. degenera)  $\Leftrightarrow \text{rg}(b) = n$  (risp.  $\text{rg}(b) < n$ ).

Supponiamo  $b: V \times V \rightarrow K$  non degenera. Se  $B$  è una base di  $V$ , sia  $A$  la matrice che rappresenta  $b$  risp.  $B$ . Allora  $\text{rg}(A) = n$ , cioè  $A$  è invertibile.

Fiss  $v \in V$ ,  $v \neq 0_v$   $K_B: V \rightarrow K^n$   $K_B(v) = x$

Allora  ${}^t_x A$  è una matrice  $1 \times n \cdot n \times 1 = 1 \times 1$  non nulla.

Infatti, se  ${}^t_x A = 0$ , allora  ${}^t({}^t_x A) = {}^t 0 \Rightarrow {}^t A x = 0$

Ma  ${}^t A$  è invertibile, quindi  $x = 0$ . Assurdo.

Da  ${}^t_x A \neq 0$  segue l'esistenza di  $y \in K^n$  t.c.  ${}^t_x A y \neq 0$

Se chiamo  $w$  il vettore in  $V$  t.c.  $K_B(w) = y$  ho che

$b(v, w) = {}^t x \mathbb{F} y \neq 0$ . Necessariamente  $y \neq 0_{K^n}$ , dunque  $w \neq 0_V$ .

### ESERCIZIO

Se  $b: V \times V \rightarrow K$  è forma bilineare non-degenera e se  $w \in V$ ,  $w \neq 0_V$ , provare che esiste  $v \in V$  tale da  $b(v, w) \neq 0$ .

### Riassumendo

#### PROPOSIZIONE

Se  $b: V \times V \rightarrow K$  è forma bilineare non degenera, allora

- a) per ogni  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  esiste  $w \in V$  t.c.  $b(v, w) \neq 0$
- b) per ogni  $w \in V$ ,  $w \neq 0$  esiste  $v \in V$  t.c.  $b(v, w) \neq 0$ .

Proveremo in seguito che, se vale la condizione a) (oppure la b)) allora  $b$  è non-degenera. **MEMO!**

~ o ~

D'ora in avanti considereremo solo forme bilin. simmetriche

Def.  $b: V \times V \rightarrow K$  bilin., simm. .  $u, v \in V$  si dicono ortogonali tra loro se  $b(u, v) = 0$ .  $u \perp v$ .

$E \subset V$  sottinsieme  $E \neq \emptyset$ .

$E^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall w \in E\}$  è sottospazio vettoriale di  $V$ .

Def.  $v \in V$  si dice vettore isotropo <sup>ISOTROPO</sup> risp. a  $b: V \times V \rightarrow K$  se  $b(v, v) = 0$ .

$0_V$  è banalmente vettore isotropo, ma possono esistere anche  $v \neq 0$  che sono isotropi.

### ESEMPIO

$b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sia def. rispetto alla base canonica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$0 = a_{22} = b(e_2, e_2) \Rightarrow e_2$  è v. isotropo

$v \neq 0$  sia vettore isotropo. Allora, per ogni  $\lambda \in K$

$$b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = \lambda^2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \text{ è vettore isotropo.}$$

Di conseguenza il sottospazio vett.  $\text{Span}(v)$  di  $V$  è tutto formato da vettori isotropi risp.  $b$ .

Osserviamo che se  $v \neq 0$  è isotropo, allora posto  $U = \text{Span}(v)$  si ha che  $U \cap U^\perp \neq \{0\}$ . Infatti  $v \in U \cap U^\perp$ . ( $\Rightarrow v \neq 0$ )

Supponiamo che  $v$  non sia v. isotropo  $b(v, v) \neq 0$ .

Preso  $w \in V$  <sup>arbitrario</sup> cerchiamo  $\lambda \in K$  in modo che  $v \perp w - \lambda v$

Cioè si vuole soddisfare la condizione:

$$b(v, w - \lambda v) = 0$$

$$0 = b(v, w - \lambda v) = b(v, w) - \lambda \underbrace{b(v, v)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda = \frac{b(v, w)}{b(v, v)}$$

$$U = \text{Span}(v) \quad w - \frac{b(v, w)}{b(v, v)} v \in U^\perp$$

$$w = \underbrace{\frac{b(v, w)}{b(v, v)} v}_{\in U} + \underbrace{w - \frac{b(v, w)}{b(v, v)} v}_{\in U^\perp}$$

$$\forall w \in V \Rightarrow \boxed{V = U + U^\perp}$$

Supponiamo, poi, che  $U \cap U^\perp \neq \{0\}$ . Allora esiste

$\lambda \in K, \lambda \neq 0$  tale che  $\lambda v \in U \cap U^\perp$ . Di conseguenza

$$0 \neq b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \underbrace{b(v, v)}_{\neq 0} \Rightarrow b(v, v) = 0 \Rightarrow v \text{ è v. isotropo.}$$

Assurdo.

Quindi:

$$v \text{ non isotropo} \Rightarrow U \cap U^\perp = \{0\} \quad U = \text{Span}(v).$$

Di conseguenza:

$$v \text{ non isotropo} \Rightarrow V = U \oplus U^\perp \quad U = \text{Span}(v)$$