

V : spazio vettoriale euclideo oppure unitario, $\dim(V)=n$.

"euclideo" = V è sp. vett. su $\mathbb{R}$, dotato di un prodotto scalare fissato $\langle, \rangle$

"unitario" = V sp. vett. su $\mathbb{C}$, con prodotto scalare hermitiano $\langle, \rangle$ fissato

Abbiamo visto che entrambi questi due tipi di spazi ammettono basi ON, ed abbiamo studiato i loro endomorfismi ortogonali, risp.: unitari; quelli cioè che conservano il prodotto scalare:

$$F: V \longrightarrow V \quad \text{l.c.} \quad \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

~ o ~

$F: V \longrightarrow V$ sia un endomorfismo qualsiasi. Vogliamo vedere se esiste un endomorfismo $F^*: V \longrightarrow V$ tale che

$$(1) \quad \langle F(u), v \rangle = \langle u, F^*(v) \rangle \quad \text{per ogni } u, v \in V$$

Supponiamo che F^* esista.

Sia $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base (ordinata) ON di V

Infine, siano $A = M_B^B(F)$ $B = M_B^B(F^*)$. Allora si ha

(u, v sono ora pensati come matrici colonna, cioè $n \times 1$; $u, v \in \mathbb{R}^n$ se V è euclideo, $u, v \in \mathbb{C}^n$ se V è unitario)

$$(1) \Leftrightarrow \overset{\text{casi euclideo}}{^t(Au)} v = \overset{t}{^t} u B v \quad \text{cioè} \quad \overset{t}{^t} u \overset{t}{^t} A v = \overset{t}{^t} u B v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

~~Assumere che~~ ~~rispetto~~ alla base ON B , la matrice che rappresenta il prodotto scalare è I_n .

Per il Lemma della Lezione 41 si conclude, allora $B = \overset{t}{^t} A$

INSERIRE QUI $\square$ a p. 2.

Viceversa, sia $A = M_B^B(F)$, dove B è base ON. $F \in L_A$.

Basta $F^* \stackrel{\text{def}}{=} L_{\overset{t}{^t} A}$ si ha:

$$\overset{t}{^t} (Au) v = (\overset{t}{^t} u \overset{t}{^t} A) v = \overset{t}{^t} u (\overset{t}{^t} A v) \quad \text{cioè vale la (1)}$$

Dunque F^* esiste.

Verifichiamo che F^* è unico: Sia $G: V \rightarrow V$ endom. tale che

$$(2) \quad \langle F(u), v \rangle = \langle u, G(v) \rangle \quad \forall u, v \in K^n.$$

Se $C = M_B^B(G)$ allora si è visto sopra che (2) $\Rightarrow C = {}^t \bar{A}$. ^{SPIEG.}

Dunque $G = L_{{}^t \bar{A}} = "F^*"$.

L'endomorfismo F^* si chiama endom. AGGIUNTO di F .

Grande importanza hanno gli endomorfismi che sono "aggiunti di se stessi": AUTOAGGIUNTI.

$F: V \rightarrow V$ è endomorfismo autoaggiunto $\Leftrightarrow$ vale

$$(3) \quad \boxed{\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle \quad \forall u, v \in K^n}$$

☐ Nel caso unitario si ha, invece

$${}^t(Au) \bar{v} = {}^t u \bar{B} \bar{v} \Leftrightarrow {}^t u {}^t A \bar{v} = {}^t u \bar{B} \bar{v} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n \Rightarrow$$

$${}^t A = \bar{B} \Rightarrow \underline{\underline{B = {}^t \bar{A}}}$$

Abbiamo già visto (cioè: dimostrato) $\blacktriangle$ che

PROP. $F: V \rightarrow V$ è autoaggiunto $\Leftrightarrow$ detta A la matrice che rappresenta F rispetto ad una ^{qualsiasi} base ON di V si ha che

$A = {}^t A$ cioè A è matr. simmetrica, nel caso " V euclideo"

$A = {}^t \bar{A}$ A è matr. (simm) hermitiana, nel caso " V unitario".

Questo mostra, in particolare, che gli endomorfismi autoaggiunti sono piuttosto comuni.

MATRICI ORTOGONALI ED UNITARIE

Abbiamo già dimostrato:

PROPOSIZIONE

Sia A una matrice $n \times n$, ad entrate reali, invertibile.
Allora sono equivalenti:

1. $A^{-1} = {}^t A$ cioè ${}^t A A = A {}^t A = I_n$ (4)
2. le colonne di A formano una base ON per $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}^n$
3. le righe

Una tale matrice si chiama matr. ORTOGONALE.

$$O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \text{ matrice } n \times n \text{ ortogonale}\} \quad I_n \in O(n)$$

$$A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \quad SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

$$A, B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n) \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = {}^t B {}^t A = {}^t (AB)$$

$$A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n) \quad \text{immediato da (4)}$$

EXE Verificare che: $A, B \in SO(n) \Rightarrow AB \in SO(n)$

$$A \in SO(n) \Rightarrow A^{-1} \in SO(n)$$

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{matrici } n \times n, \text{ ad entrate in } \mathbb{R}, \text{ invertibil.} \}$$

$$I_n \in GL(n, \mathbb{R}), \quad A, B \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow AB \in GL(n, \mathbb{R})$$

$$A \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Ricordiamo che il prodotto righe per colonne di matrici è sempre associativo.

Allora si hanno i gruppi e sottogruppi (SPIEGARE)

$$GL(n, \mathbb{R}) \supset O(n) \supset SO(n)$$

Consideriamo ora matrici $n \times n$, ad entrate complesse, invertibil., cioè element. di $GL(n, \mathbb{C})$.

Per una tale matrice sono equivalenti:

1. $A^{-1} = {}^t \bar{A}$
2. le colonne (risp.: le righe) di A formano una base ON per $\langle, \rangle_{\mathbb{C}}$ in $\mathbb{C}^n$.

COMMENTARE

Chiameremo UNITARIA una tale matrice.

$U(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid A \text{ è matrice } n \times n, \text{ ad entrate in } \mathbb{C}, \text{ unitaria}\}$

$$A \in U(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1$$

$$\begin{aligned} I_n = A \cdot A^{-1} = A \cdot {}^t \bar{A} &\Rightarrow 1 = \det(A \cdot {}^t \bar{A}) = \det(A) \cdot \det({}^t \bar{A}) = \\ &= \det(A) \cdot \det(\bar{A}) = \det(A) \overline{\det(A)} \quad \text{cioè} \\ |\det(A)|^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$$

$$A, B \in U(n) \Rightarrow AB \in U(n) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^t \bar{B} {}^t \bar{A} = {}^t (\overline{AB})$$

$$A \in U(n) \Rightarrow A^{-1} \in U(n) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{ESEMPIO} \quad M \in U(n) \Rightarrow \bar{M} \in U(n) \\ A \text{ hermitiana} \Rightarrow \bar{A} \text{ hermitiana} \end{array}}$$

Ricordiamo che, date due matrici $n \times n$ A, B (ad entrate in $\mathbb{R}$, oppure in $\mathbb{C}$. Basterà a due lo stesso, però) si dice che

- A è SIMILE a B se esiste P matr. $n \times n$ invertibile t.c.

$$A = P^{-1}BP$$

- A è CONGRUENTE a B se esiste P $n \times n$, invertibile t.c.

$$A = {}^t PBP$$

Due matrici simil. rappresentano lo stesso endomorf. di $\mathbb{K}^n$ rispetto a basi diverse.

Due matrici congruenti rappresentano la stessa forma bilineare di $\mathbb{K}^n$, rispetto a basi diverse.

Supp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se P è m. ortogonale t.c. $A = P^{-1}BP$, allora vale anche $A = {}^t PBP$, e viceversa. Cioè A e B sono sia simili che congruenti.

Analoga situazione se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Questo mostra l'interesse di cercare di diagonalizzare un endomorfismo utilizzando esclusivamente matrici ortogonali (se $K = \mathbb{R}$), oppure unitarie (se $K = \mathbb{C}$).

Il "significato geometrico" di una tale ricerca è: vedere se V ammette una base ON di autovettori di F .

Osserviamo che una tale base (se esiste) oltre a diagonalizzare F , diagonalizza anche il prodotto scalare fissato in V (e lo fa in modo "brutale": la matrice del prodotto scalare non è solo diagonale, è I_n)
(rispetto a tale base)

no ~ o ~

TEOREMA

~~PROPOSIZIONE~~ SPETTRALE PER OP. AUTOAGGI. DI UNO SPAZIO UNITARIO

Se V è uno spazio unitario ogni endomorfismo autoaggiunto di V , sia $F: V \rightarrow V$ ammette una base ON tutta formata da autovettori di F .

Dim. ← Per induzione su $n = \dim(V)$.

Ricorda quella del teor. di Euler

$n=1$ Ogni vettore $\neq 0$ di V è autovettore; per avere una base ON di autovettori basta prendere un vettore.

$n > 1$ Il polinomio caratteristico $p_F(t)$ ha i coeff. in $\mathbb{C}$, ed è di grado n . Per il "teorema fondamentale dell'algebra" esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $p_F(\lambda) = 0$, cioè esiste un autovalore per F . Sia $v \in V$ un autovettore per F relativo a λ , cioè

$$F(v) = \lambda v \quad \text{e} \quad v \neq 0_v$$

Se $U = \text{span}(v)$, consideriamo $U^\perp$. Abbiamo già visto che $V = U \oplus U^\perp$.

Sia $w \in U^\perp$, cioè $\langle v, w \rangle = 0$. Allora

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Quindi $F(w) \in U^\perp$. Dunque $F|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = n - 1$$

$\langle, \rangle$ su V induce chiaramente un prodotto scalare hermitiano su $U^\perp$: basta limitarsi a prendere come argomenti di $\langle, \rangle$ dei vettori in $U^\perp$.

Ulteriormente chiaramente, $F|_{U^\perp}$ è autoaggiunto risp. $\langle, \rangle_{U^\perp}$.

Quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva all'endomorfismo autoaggiunto $F|_{U^\perp}$ di $U^\perp$, ottenendo una base $v_2, \dots, v_n$ di $U^\perp$ tutta formata da autovettori per $F|_{U^\perp}$, quindi per F .

Per ottenere una base ON di V tutta formata da autovettori di F è sufficiente aggiungere a $v_2, \dots, v_n$

$$v_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{\|v\|}$$



OSSERVAZIONE

L'unico punto in cui si è usato che V è uno sp. vettoriale su $\mathbb{C}$ è stato quando bisognava essere sicuri che il polinomio caratteristico $p_F(t)$ avesse almeno una radice.

Se riusciamo a provare questo per un endomorfismo autoaggiunto di uno sp. vett. eucledes, allora il resto della dim. funziona tale e quale.

È sottinteso che la radice di $p_F(t)$ sia nel campo $\mathbb{C}$. Ma.

IMP!

LEMMAdi un endomorfismo autoaggiunto $F: V \rightarrow V$,tutti gli autovalori di uno spazio vett. unitario V sono reali.

Dim.
 Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore per F , e sia $v \in V$, $v \neq 0$ un autovettore per F rel. a λ : $F(v) = \lambda v$. Allora

$$\langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\in \mathbb{R}} > 0$$

$$\langle \lambda v, v \rangle \quad \langle v, \lambda v \rangle$$

$$\text{Dunque } \lambda = \bar{\lambda}, \text{ quindi}$$

$$\lambda \langle v, v \rangle \quad \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$



Con ragionamento analogo si prova la

PROP. V ed F come sopra.

Se u, v sono autovettori relativi ad autovalori distinti λ, μ , allora $u \perp v$.

Dim.

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ per il lemma precedente, con $\lambda \neq \mu$

$$F(u) = \lambda u \quad F(v) = \mu v \quad u, v \in V \text{ entrambi } \neq 0. \text{ Allora}$$

$$\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle$$

$$\langle \lambda u, v \rangle$$

$$\langle u, \mu v \rangle \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \langle u, v \rangle$$

$$\mu \langle u, v \rangle$$

$$\text{Dunque } \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$$



TEOREMA SPETTRALE ($m \in \mathbb{C}$) IN FORMA MATRICIALE

Per ogni matrice hermitiana A , $n \times n$, esiste $P \in U(n)$ tale che $PAP = P^{-1}AP$ sia diagonale.