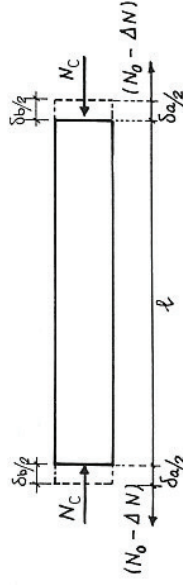


6.4. Le Tensioni a Vuoto

6.4.1. Precompressione a fili aderenti o ad armatura pre-tesa

Maturato il getto si esegue il taglio dei fili, che tenderanno ad accorciarsi; a questo fenomeno si oppone il calcestruzzo che di conseguenza risulta essere luogo di uno stato di coazione (precompressione).

Si osservi che a questo punto **i cavi presentano una sollecitazione di trazione inferiore a quella iniziale**, perché anch'essi si sono accorciati con il calcestruzzo di δ .



N_0 = trazione iniziale dei cavi (nota)

N_c = compressione calcestruzzo

$N_0 - \Delta N$ = trazione reale cavi

Possiamo scrivere le equazioni di congruenza ed equilibrio nell'incognita iperstatica ΔN :

$$\frac{N_c L}{E_c A_c} = \frac{\Delta N L}{E_p A_p}$$

eq. di congruenza

$$\frac{N_c L}{E_c A_c} \cdot \frac{E_p A_p}{L} = \Delta N = N_c = N_c \frac{E_p A_p}{E_c A_c} = N_c n \frac{A_p}{A_c}$$

con n coefficiente di omogeneizzazione istantaneo E_p/E_c

Novembre 2016 – v. 11.0

- Pag. 6.28 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

$$N_c = N_0 - \Delta N$$

eq. di equilibrio

$$N_0 = N_c + \Delta N = N_c + N_c n \frac{A_p}{A_c} =$$

$$N_0 = N_c \left(1 + n \frac{A_p}{A_c} \right) = N_c \left(\frac{A_c + n A_p}{A_c} \right)$$

Da cui si ricava la compressione nel cls e relativa tensione σ_c

$$N_c = N_0 \frac{A_c}{A_c + n A_p}$$

$$\sigma_c = \frac{N_0}{A_c} \frac{A_c}{A_c + n A_p} = \frac{N_0}{A_{id}}$$

La forza residua nell'acciaio vale evidentemente N_c (per equilibrio).

La **caduta di tensione** è pari a :

$$\Delta \sigma_p = \frac{\Delta N}{A_p} = \frac{N_c n A_p / A_c}{A_p} = \frac{n N_c}{A_c} = n \cdot \sigma_c$$

$$\sigma_p = \sigma_0 - \Delta \sigma_p = \sigma_0 - n \cdot \sigma_c$$

Riassumendo, la tensione nel calcestruzzo è pari alla tensione iniziale N_0 diviso l'area ideale A_{id} , mentre la caduta di tensione dovuta al rilascio dei cavi è n volte la sollecitazione nel cls σ_c .

Nel caso in cui l'area dell'acciaio da precompressione sia pari all'un percento di A_c , si ha una perdita di:

$$\frac{N_c}{N_0} = \frac{A_c}{A_c + nA_p} = \frac{100}{100 + 7 \times 1} = 0.93$$

cioè la compressione sul cls è pari al 93% del carico iniziale applicato al cavo (7% di perdita).

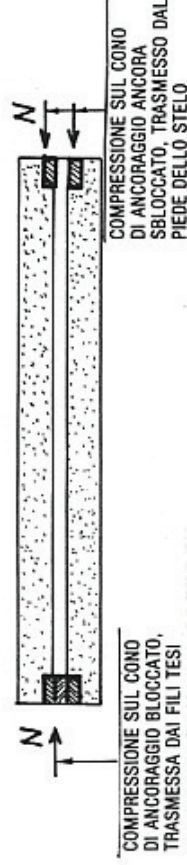
Se il cavo non fosse baricentrico, bisognerebbe utilizzare le formule della pressione eccentrica.

$$\sigma_c = \frac{N_0}{A_{id}} \pm \frac{N_0 \cdot e}{J_{id}} y$$

$$\sigma_p = \sigma_0 - n \cdot \sigma_c = \frac{N_0}{A_p} - n \left[\frac{N_0}{A_{id}} \pm \frac{N_0 \cdot e^2}{J_{id}} \right]$$

6.4.2. Precompressione a cavi scorrevoli o ad armatura post-tesa

In questo caso, i cavi vengono tesi dopo la realizzazione dell'elemento in c.a., agendo con appositi martinetti alle testate del manufatto.



In ogni istante si ha uguaglianza fra l'azione di trazione sul cavo e la compressione sul cls:

$$N_c = N_p = N$$

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c} \qquad \sigma_p = \frac{N}{A_p}$$

Nel caso di cavo eccentrico, si devono utilizzare le formule della pressione eccentrica:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c} \pm \frac{N \cdot e}{J_c} y \qquad \sigma_p = \frac{N}{A_p}$$

6.5. Carichi Equivalenti alla Precompressione

Spesso, per semplicità, si vuole associare ad una generica precompressione, ossia ad una possibile disposizione dei cavi, un sistema di carichi esterni equivalenti che producono nelle struttura le stesse deformazioni e lo stesso regime tensionale; in questo modo la precompressione viene trattata come se fosse un carico agente ed opportunamente combinato con le altre azioni:

$$F_d = \sum_{j=1}^m \gamma_{jg} G_{jk} + \gamma_p P_k + \gamma_{1q} Q_{1k} + \sum_{i=2}^n (\gamma_{iq} \psi_{oi} Q_{ik})$$

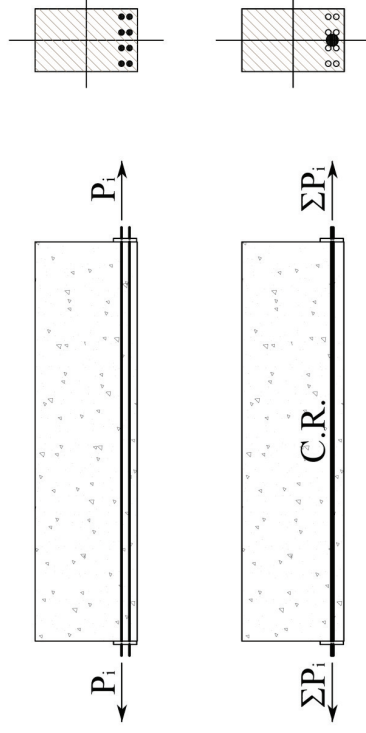
Le nuove Norme tecniche **D.M. 14.01.2008** fissano il coefficiente parziale di sicurezza $\gamma_p = 1.0$, mentre il **D.M. 1996** fissava i seguenti valori:

$$\gamma_p = 0.9 \quad (1.2 \text{ se il suo contributo diminuisce la sicurezza})$$

Si noti che i carichi equivalenti sono per loro natura equilibrati, nel senso che in un sistema staticamente determinato (isostatico) non inducono reazioni vincolari; nei sistemi iperstatici, invece, i carichi equivalenti (e perciò anche la precompressione) producono in generale reazioni vincolari però comunque auto-equilibrate.

6.5.1. Cavo Risultante C.R.

Si definisce **Cavo Risultante** (indicato come **C.R.**) il cavo fittizio che esercita in ogni sezione uno sforzo uguale alla risultante delle forze di precompressione e con la stessa eccentricità, cioè genera lo stesso effetto dei cavi reali.



Se la tensione di trazione σ_{sp} è la medesima in tutti i cavi, il Cavo Risultante si troverà nel baricentro del sistema di cavi effettivi:

$$P = \sum_{i=1}^n (A_{pi} \cdot \sigma_{pi}) = \sigma_p \sum_{i=1}^n A_{pi}$$

Ai fini del calcolo del c.a.p. si ipotizza che:

1) i cavi siano assimilabili a fili e pertanto resistono solamente a trazione; inoltre si fa l'ipotesi di trascurare completamente il peso proprio del cavo:

$$M = 0 \quad (EJ=0) \quad N \neq 0$$

2) i cavi assumono spontaneamente la configurazione che comporta l'equilibrio fra forze interne e forze esterne;

3) in questa fase si trascura l'attrito fra cavo / struttura;

4) un cavo con tracciato curvilineo che si appoggia su una superficie regolare, esercita su di essa una pressione pari a:

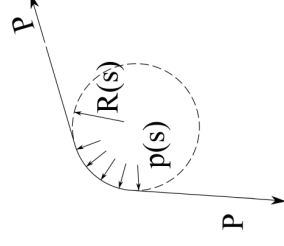
$$p(s) = \frac{P}{R(s)} \quad \left[\frac{F}{L} \right]$$

con :

P = forza di trazione nel cavo;

$R(s)$ = raggio di curvatura della curva assunta dal cavo;

$p(s)$ = pressione sulla superficie.



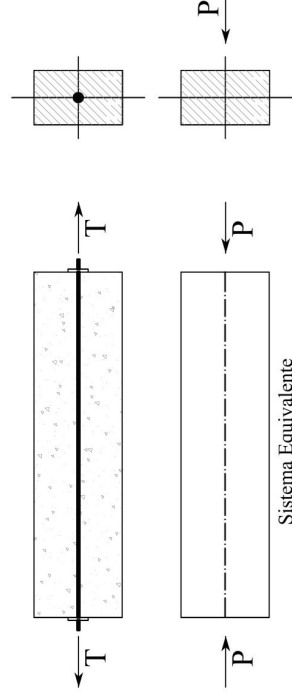
6.5.2. Cavo rettilineo baricentrico (post-teso)

Consideriamo una trave in c.a.p. a cavi post-tesi, con Cavo Risultante baricentrico.

In corrispondenza degli ancoraggi di estremità si ha la trasmissione delle forze dal dispositivo di bloccaggio al cls: la trave risulta compressa con un carico P e, ad una certa distanza dal dispositivo, le tensioni nel calcestruzzo sono uniformi:

le tensioni nel calcestruzzo sono costanti e pari a

$$\sigma_c = \frac{P}{A_c}$$



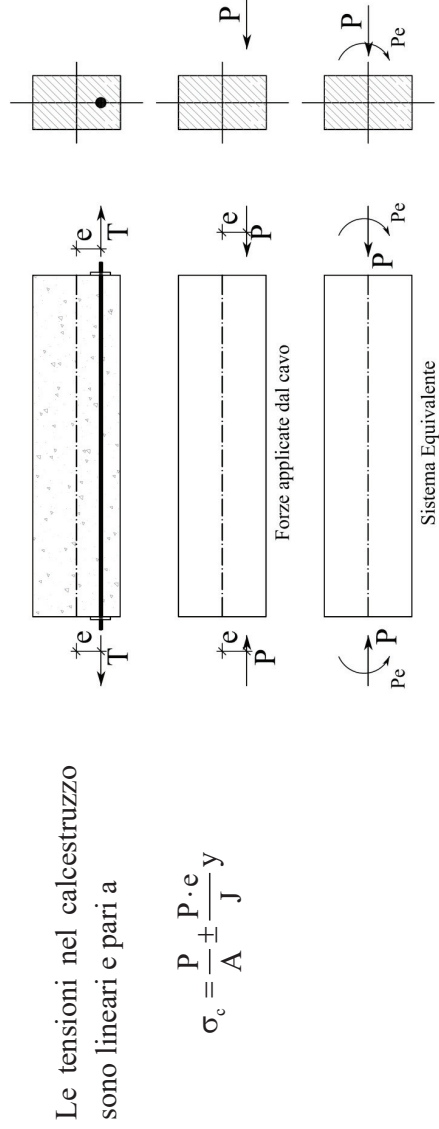
In questo caso si ha:

Cavo Risultante C.R. \equiv Linea delle Pressioni

la risultante delle forze agisce in corrispondenza del baricentro, quindi compressione centrata. Tale soluzione si applica quando trave è soggetta ad una forza esterna di trazione uniforme.

6.5.3. Cavo rettilineo eccentrico (post-teso)

Consideriamo una trave in c.a.p. a cavi post-tesi, con Cavo Risultante orizzontale eccentrico "e". La risultante delle compressioni P con eccentricità "e" è equivalente ad un sistema a risultante P centrata ed un momento pari a $M = P \cdot e$: in tal caso la trave è soggetta a pressoflessione (P, M).



Anche in questo caso si ha: Cavo Risultante C.R. \equiv Linea delle Pressioni

Tale soluzione si applica quando trave è soggetta a due momenti uguali alle estremità.

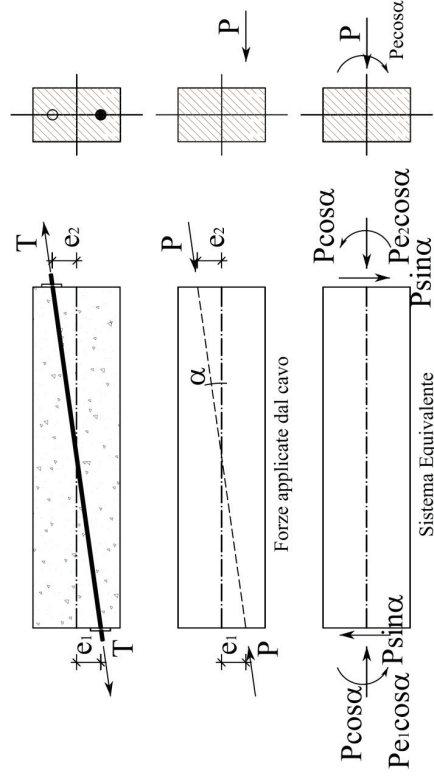
Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.36 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

6.5.4. Cavo rettilineo inclinato rispetto alla linea d'asse (post-teso)

Consideriamo una trave in c.a.p. a cavi post-tesi, con Cavo Risultante inclinato di un angolo α rispetto alla linea d'asse ed eccentricità agli estremi pari a "e" ($e_1 = e_2$).



Per prima cosa verifichiamo che il sistema sia autoequilibrato:

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.37 -

$$\text{Eq. Traslazione H} \quad P \cos \alpha - P \cos \alpha = 0$$

$$\text{Eq. Traslazione V} \quad P \sin \alpha - P \sin \alpha = 0$$

$$\text{Eq. Rotazione} \quad P \cos \alpha \cdot e_2 + P \cos \alpha \cdot e_1 - P \sin \alpha \cdot L = 0$$

$$\cos \alpha (e_2 + e_1) = \sin \alpha \cdot L$$

$$\frac{\cos \alpha (e_2 + e_1)}{\sin \alpha} = L$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} = L$$

I carichi equivalenti consistono in:

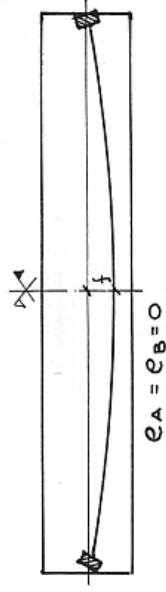
- Una forza di compressione pari a $P \cos \alpha$
- Una forza di taglio pari a $P \sin \alpha$
- Una coppia pari a $P e \cos \alpha$

Anche in questo caso si ha: Cavo Risultante C.R. \equiv Linea delle Pressioni

6.5.5. Cavo parabolico, ancorato all'estremità nei baricentri delle sezioni (post-teso)

Consideriamo una trave in c.a.p. a cavi post-tesi, con Cavo Risultante a tracciato parabolico, simmetrico rispetto alla mezzeria, ancorato in corrispondenza dei baricentri delle sezioni di estremità e freccia pari a “f” in mezzeria.

In questo caso le caratteristiche della sollecitazione dipendono dalla posizione relativa tra il cavo e il baricentro della sezione.

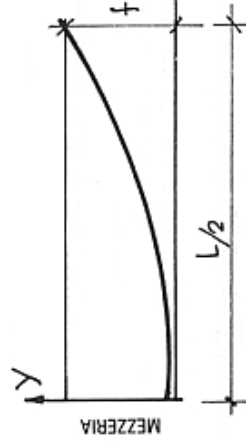


Valutiamo l'equazione che descrive il tracciato del cavo:

$$y = a \cdot x^2$$

$$x = L/2 \quad y = a \cdot (L/2)^2 = f \quad a = \frac{4f}{L^2}$$

$$y = \frac{4f}{L^2} x^2$$



La funzione $y(x)$ rappresenta l'eq. del cavo nel sistema di riferimento rappresentato in figura.

Poiché generalmente la lunghezza L predomina sulle altre due dimensioni (elementi snelli), si può pensare α piccolo e quindi:

$$y'(x) \cong \tan \alpha(x) \quad \tan \alpha \cong \sin \alpha \cong \alpha \quad \cos \alpha \cong 1 \quad y''=1/R$$

In questo caso si ha:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{8f}{L^2} x \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8f}{L^2}$$

$$y'(L/2) = \frac{8f}{L^2} \frac{L}{2} = \frac{4f}{L}$$

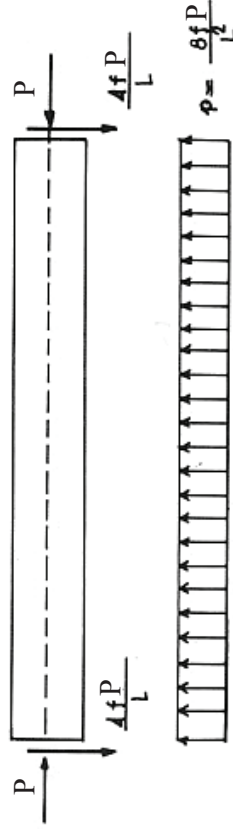
$$\tan \alpha(L/2) \cong \sin \alpha(L/2) \cong \frac{4f}{L}$$

Quindi:

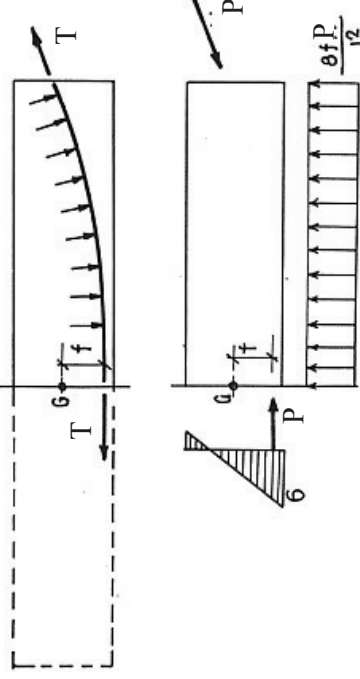
Taglio pari a: $P \sin \alpha(L/2) \cong \frac{4f}{L} P$

Compressione pari a: $P \cos \alpha(L/2) \cong P$

il carico ripartito sulla superficie curva: $p(s) = \frac{P}{R} \cong Py'' = \frac{8f}{L^2} P$



$p(s)$ rappresenta l'azione distribuita che il cls esercita sul cavo a causa della sua continua deviazione; a sua volta il cavo esercita una pressione uguale ed opposta sul cls. Queste pressioni radiali sono a *componente orizzontale nulla* (per simmetria), pertanto è efficace solamente la componente verticale p (in modulo circa uguale a $p(s)$ per α piccoli).



Scrivendo gli equilibri alla traslazione verticale, orizzontale e alla rotazione si dimostra che il sistema equivalente è equilibrato.

$$\text{Eq. Traslazione H} \quad P - P = 0$$

$$\text{Eq. Traslazione V} \quad P \frac{4f}{L} + P \frac{4f}{L} - P \frac{8f}{L^2} \cdot L = 0$$

$$\text{Eq. Rotazione} \quad P \frac{4f}{L} \cdot L - P \frac{8f}{L^2} \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

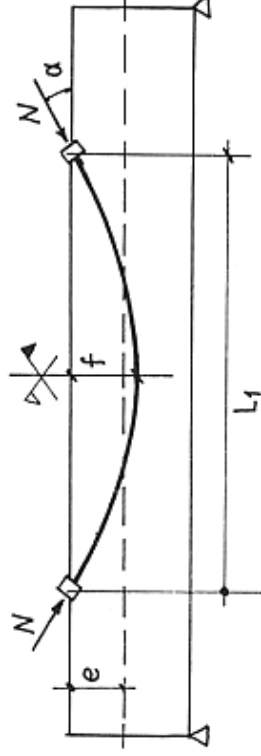
Affinché siano rispettate le ipotesi (α piccolo) la freccia f deve essere piccola, cioè il cavo deve essere molto “schiacciato”.

Tale soluzione si applica quando trave è soggetta ad un carico distribuito q costante.

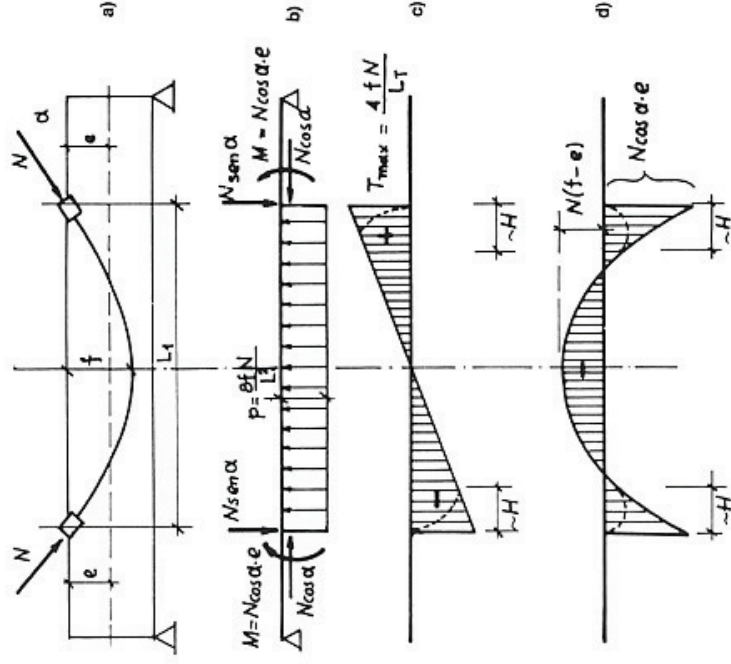
Il tracciato di tipo parabolico è tipico della tecnologia post-tesa.

6.5.6. Cavo parabolico, ancorato in sezioni intermedie (post-tesa)

Nelle figure seguenti sono riportati i Carichi Equivalenti alla precompressione nel caso di cavo parabolico ancorato in sezioni intermedie all'estradosso della trave.



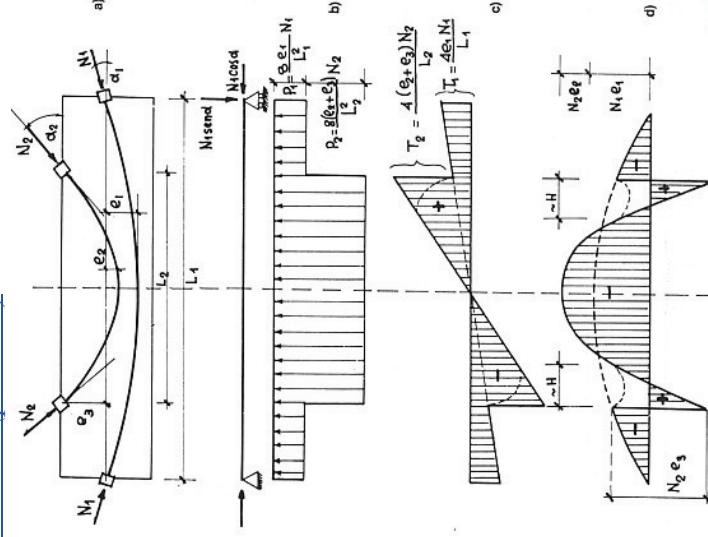
Le linee tratteggiate tracciate nei diagrammi di sollecitazione riportano il “reale” andamento delle sollecitazioni tenendo conto che, dopo l’ancoraggio, c’è una zona di transizione, nella quale le forze interne si diffondono fino a raggiungere le σ e τ previste teoricamente.



a) DISPOSIZIONE COSTRUTTIVA
 b) SISTEMA EQUIVALENTE
 c) SFORZI TAGLIANTI
 d) MOMENTI FLETTENTI

6.5.7. 2 Cavi parabolici, ancorati in sezioni diverse (post-teso)

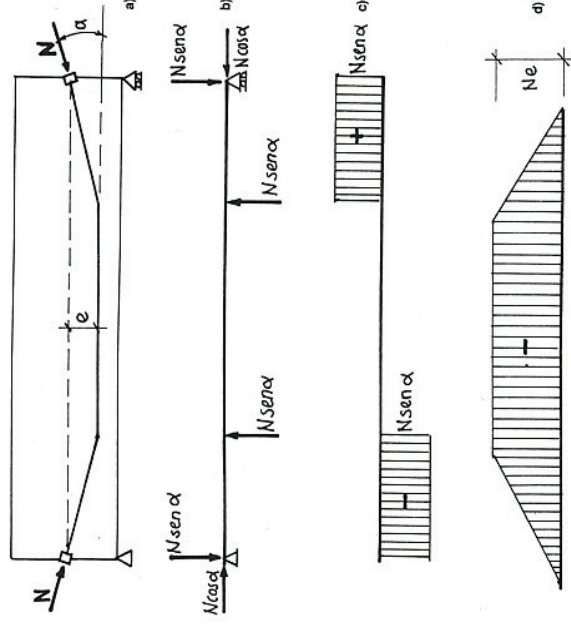
Nella figura seguente sono riportati i Carichi Equivalenti alla precompressione nel caso di due cavi parabolici ancorati in sezioni differenti.



a) DISPOSIZIONE COSTRUTTIVA
 b) SISTEMA EQUIVALENTE
 c) SFORZI TAGLIANTI
 d) MOMENTI FLETTENTI

6.5.8. Cavo poligonale (post-teso)

Nella figura seguente sono riportati i Carichi Equivalenti alla precompressione nel caso di un cavo poligonale ancorato in corrispondenza del baricentro delle sezioni di estremità.



a) DISPOSIZIONE COSTRUTTIVA
b) SISTEMA EQUIVALENTE
c) SPREZI FAGLIANTI
d) MOMENTI FLETTENTI

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

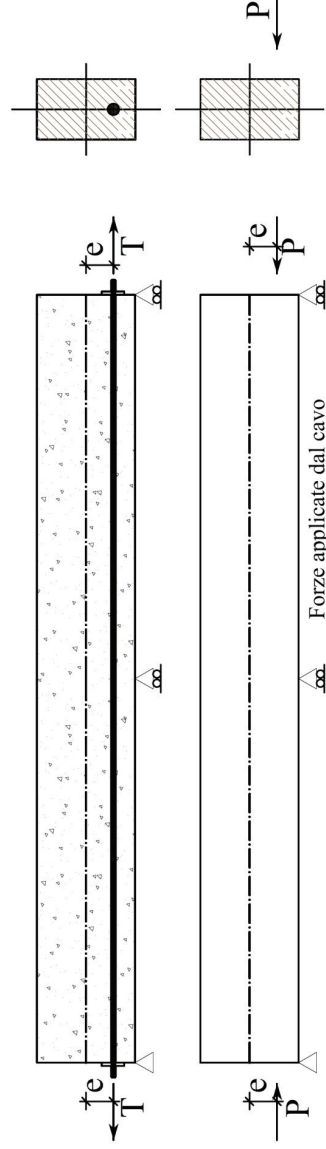
- Pag. 6.46 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

6.5.9. Sistemi iperstatici

Nel caso di una struttura iperstatica il sistema di carichi equivalenti alla precompressione mostra tutte le sue potenzialità. Invece di utilizzare i metodi classici per valutare le reazioni iperstatiche dovute alla precompressione, si può infatti adottare il sistema equivalente che permette di studiare la precompressione come una serie di carichi distribuiti e concentrati trattabili al pari dei carichi esterni. Essa però darà in generale luogo a reazioni iperstatiche che compaiono anche in assenza di forze esterne (stato di coazione).

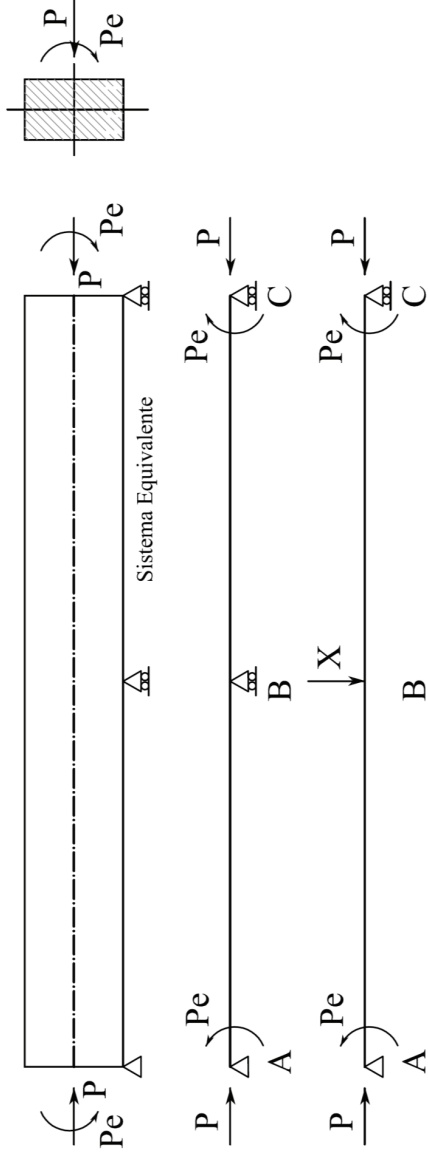
Si consideri ad esempio la trave a due campate con una Cavo Risultante rettilineo ed eccentricità pari a “e”:



Forze applicate dal cavo

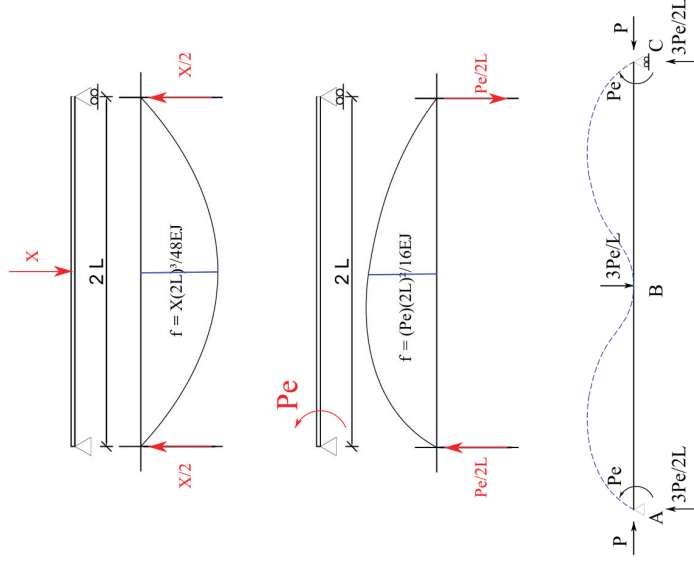
Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.47 -



Si tratta di una trave iperstatica con uno sforzo normale e due coppie agenti alle estremità; per determinare l'incognita iperstatica X si fa uso del **Metodo delle Forze**: si rende la struttura isostatica rimuovendo un vincolo, si impone al suo posto una forza incognita determinata con le equazioni di congruenza

$$\begin{aligned} \text{Eq. congruenza} \quad \eta_B &= 0 \\ \eta_B &= \eta_B(P, P \cdot e) + \eta_B(X) \end{aligned}$$



$$\eta_B(X) = \frac{X(2L)^3}{48EJ}$$

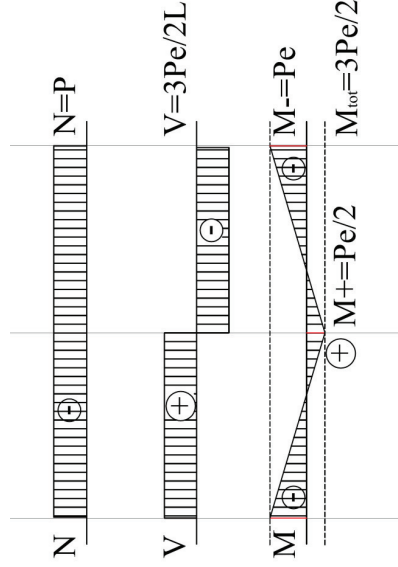
$$\eta_B(P \cdot e) = \frac{(P \cdot e)(2L)^2}{16EJ}$$

$$\eta_B = \frac{X(2L)^3}{48EJ} - 2 \frac{(P \cdot e)(2L)^2}{16EJ} = 0$$

$$\eta_B = \frac{X(L)}{24} - \frac{(P \cdot e)}{8} = 0$$

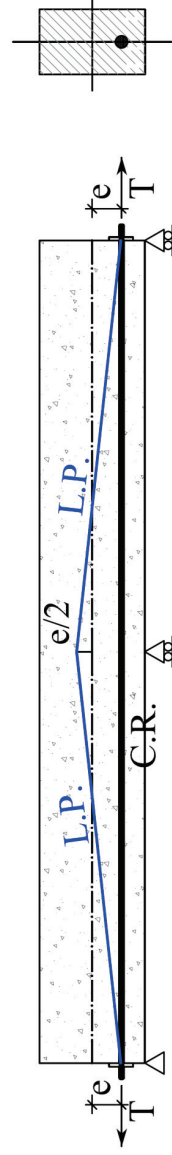
$$\rightarrow X = \frac{3(P \cdot e)}{L}$$

Di seguito si riportano i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione dovute solamente alla precompressione P:



Anche in questo caso, i carichi equivalenti alla precompressione sono auto equilibrati, però fanno intervenire i vincoli.

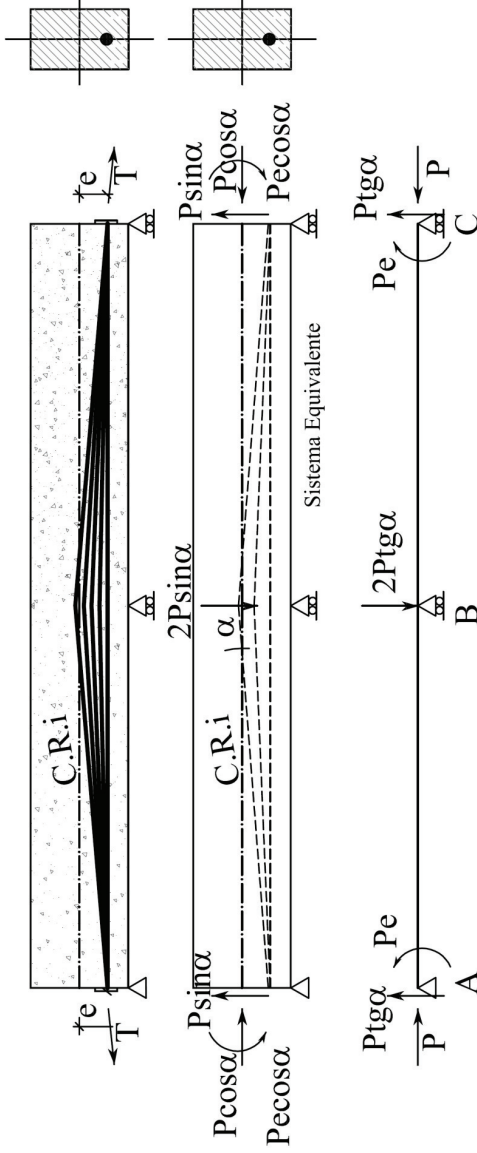
Infatti, mentre in una struttura isostatica il C.R. coincide sempre con la Linea delle Pressioni L.P., in una struttura iperstatica ciò non avviene in generale:



La Linea delle Pressioni è “quella linea (in generale una curva) che congiunge tutti i centri di pressione siti nelle sezioni dell’elemento”, cioè è la direzione della risultante degli sforzi di compressione.

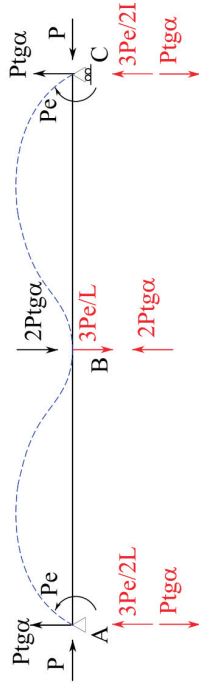
6.5.10. Cavi Equivalenti e Cavo Concordante

Consideriamo ora diversi tracciati poligonali del C.R. con la stessa eccentricità agli estremi:

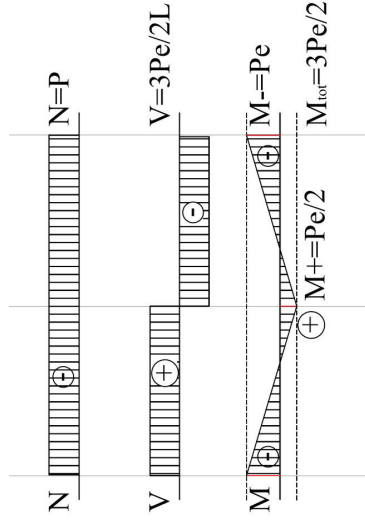


Per piccole eccentricità, si può assumere α piccolo e pertanto si ha: $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \text{tga}$.

Attraverso gli equilibri alla traslazione e alla rotazione si dimostra che il sistema equivalente è ancora equilibrato, ma presenta reazioni vincolari diverse in funzione dell’angolo α .



In figura sono indicate in rosso le reazioni vincolari espresse in funzione di α (angolo di inclinazione del cavo rispetto all'asse della trave).



Al variare di α , NON variano le caratteristiche della sollecitazione, cioè tutti i cavi C.R.i presentano le stesse sollecitazioni e stessa Linea delle Pressioni.

In una trave iperstatica si definisce **famiglia di Cavi Equivalenti** tutti quei cavi che presentano

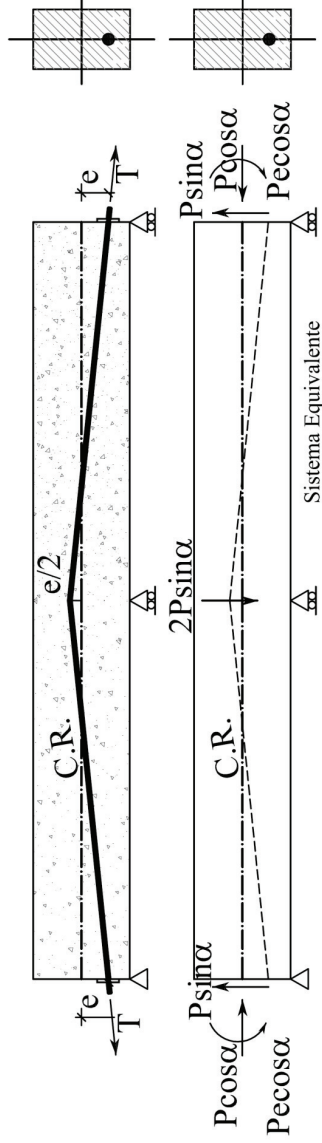
- la stessa eccentricità agli estremi;
- la medesima linea delle pressioni;
- comportano reazioni vincolari diverse in funzione di α .

In altre parole tutti i **Cavi Equivalenti** di una famiglia differiscono tra loro solamente per l'eccentricità in corrispondenza dell'appoggio intermedio e le conseguenti reazioni vincolari.

Inoltre, data una famiglia di cavi equivalenti, la loro comune linea delle pressioni si chiama **Curva Stabile delle Pressioni**.

Infine, data una famiglia di cavi equivalenti, si può passare da un cavo all'altro mediante una **Trasformazione Lineare** che lascia invariate le eccentricità terminali e le curvature dei cavi, alterando solo le eccentricità agli appoggi intermedi.

Consideriamo ora un particolare cavo equivalente tale che l'eccentricità in mezzera è pari a $e/2$:



Anche questo tracciato del C.R. presenta la stessa linea delle pressioni L.P. ma diverse reazioni vincolari: più precisamente il tracciato del cavo coincide con la L.P. e si dimostra che le reazioni vincolari sono nulle:

in base alla geometria del cavo si ha:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{e + e/2}{L} = \frac{3e/2}{L}$$

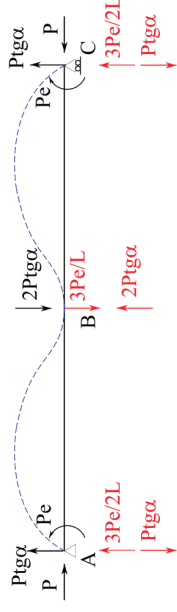
quindi la reazione in A e in C vale:

$$\frac{3P_e}{2L} - P \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{3P_e}{2L} - P \frac{3e/2}{L} = 0$$

la reazione in B vale:

$$\frac{3P_e}{L} - 2P \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{3P_e}{L} - 2P \frac{3e/2}{L} = 0$$

Le reazioni sono nulle, cioè i vincoli non intervengono.



Si definisce Cavo Concordante C.C. quel Cavo Risultante C.R. appartenente ad una famiglia di Cavi Equivalenti tale che, in una struttura iperstatica, non fa reagire i vincoli; ciò avviene quando il cavo coincide con la Linea delle Pressioni L.P.

Riassumendo:

- nelle strutture isostatiche:

Cavo Risultante C.R. ≡ Linea delle Pressioni
- nelle strutture iperstatiche, in genere:

Cavo Risultante C.R. ≠ Linea delle Pressioni
- nelle strutture iperstatiche, quando un Cavo Risultante coincide con la Curva (Linea) delle Pressioni non provoca reazioni vincolari e viene detto Cavo Concordante

Cavo Concordante C.C. = Linea delle Pressioni
- nelle strutture iperstatiche:

dato un Cavo Concordante si può dedurre una famiglia di Cavi Equivalenti mediante trasformazioni lineari.

OSS:

In generale si cerca di progettare un tracciato del cavo che eviti la formazione di reazioni iperstatiche senza però alterare il sistema equivalente (Cavo Concordante).

6.6. Perdite di Precompressione

Dopo aver analizzato la tecnologia della precompressione, i materiali utilizzati ed esposto alcuni casi semplici per determinare i carichi equivalenti, è necessario analizzare tutti quei fenomeni che tendono a ridurre l'effetto della precompressione.

Le perdite della precompressione si classificano in:

- **PERDITE ISTANTANEE**, cioè che si verificano nel momento stesso in cui si introducono le forze di pressoeccitazione:
 - Perdite al martinetto (pre-teso e post-teso)
 - Perdite agli ancoraggi (pre-teso e post-teso)
 - Perdite per attrito tra cavi, tra cavi e guaine (post-teso)
 - Perdite per deformazione elastica istantanea (pre-teso e post-teso)

- **PERDITE DIFFERITE**, cioè che si verificano dopo un certo lasso di tempo, più o meno lungo:
 - Perdite per ritiro del calcestruzzo
 - Perdite per deformazione viscosa del calcestruzzo
 - Perdite per rilassamento dell'acciaio da precompressione

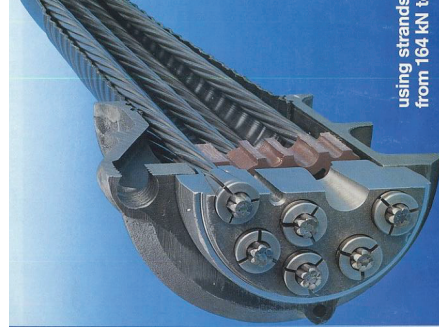
Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.56 -

6.6.1. Perdite istantanee

6.6.1.1. Perdite istantanee al martinetto ed agli ancoraggi

Queste perdite sono intrinseche del sistema di precompressione adottato (brevetato) e la stessa ditta specializzata in fase di esecuzione adotta una serie di correzioni della tesatura.



Generalmente la trazione imposta dal martinetto è leggermente maggiore proprio per assorbire la perdita del dispositivo di serraggio (solitamente cunei tronco-conici): affinché i cunei blocchino il cavo ci deve essere un minimo rientro del cavo.

Queste perdite sono presenti sia nella tecnologia pre-tesa a fili aderenti, sia in quella a cavi post-tesi.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.57 -

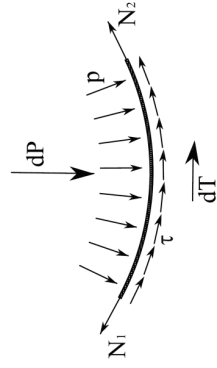
6.6.1.2. Perdite istantanee per attrito

Le perdite per attrito appartengono esclusivamente al sistema post-teso in cui i cavi vengono tesati dopo il getto del manufatto e scorrono all'interno di apposite guaine. Le perdite avvengono ovviamente **nel tratto curvo**, per effetto del cavo appoggiato sulla superficie interna della guaina che preme a sua volta su quella in calcestruzzo generando attriti; ma anche **nei tratti rettilinei**, dovuti essenzialmente al serpeggiamento in pianta del cavo (ondulazioni della guaina all'atto della messa in opera ed alle imperfezioni delle superfici interne delle guaine).

Generalmente il cavo viene teso da un solo lato con una forza N_1 nota, mentre il lato fisso è soggetto ad un forza N_2 (incognita) inferiore a causa delle perdite: $N_2 = N_1 - \Delta N$

Perdite per attrito in curva

Sul generico tratto curvo del cavo agiscono le seguenti forze:



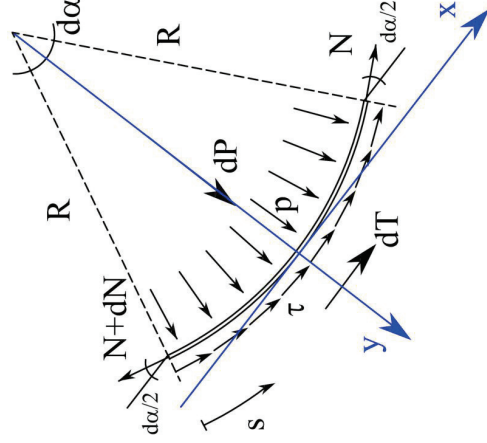
N_1 = forza di trazione nel cavo all'estremo i;

$p(s)$ = forze di deviazione [F/L]

$\tau(s)$ = forze d'attrito [F/L]

dP = risultante delle forze di deviazione [F]

dT = risultante delle forze di attrito [F]



posto α piccoli:

$$ds = R d\alpha \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \cong \frac{d\alpha}{2} \quad \cos \frac{d\alpha}{2} \cong 1$$

Eq. di equilibrio dir.y

$$dP - N \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \frac{d\alpha}{2} = 0$$

$$dP - 2N \frac{d\alpha}{2} = 0 \quad dP = Nd\alpha$$

$$dP \cong p ds = p R d\alpha$$

$$p = \frac{N}{R}$$

forza di deviazione [F/L]

Eq. di equilibrio dir.x

$$N + dT - (N + dN) = 0$$

$$dT = dN$$

in situazione di attrito (scorrimento incipiente) $dT = f_c \cdot dP$

ma $dP = Nd\alpha$

con f_c coefficiente di attrito

$$dT = dN = f_c \cdot Nd\alpha = f_c \cdot N \frac{ds}{R}$$

L'equazione differenziale:

$$\frac{dN}{N} = f_c \cdot d\alpha$$

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{f_c \alpha} \quad N_1 > N_2$$

$$N_2 = N_1 e^{-f_c \alpha} \quad (\text{incognita})$$

integrata fra i limiti N_1 e N_2 fornisce la seguente soluzione:

per α piccoli ($\alpha < 30^\circ$) può essere sviluppata in serie approssimando a:

$$N_2 = N_1 (1 - f_c \alpha)$$

$$\frac{\Delta N}{N_1} = f_c \alpha$$

con α in radianti

Generalmente si ha $H/L = 1/15$ pertanto,

nel caso di cavi ancorati alle estremità si ha $\alpha \cong 15^\circ \div 20^\circ$

nel caso di cavi ancorati all'estradosso si ha $\alpha \cong 20^\circ \div 30^\circ$

Per il coefficiente di attrito f_c , in assenza di dati sperimentali, si possono assumere i seguenti valori in funzione del tipo di guaina e superficie di appoggio:

cavo su calcestruzzo liscio $f_c = 0.50$

cavo in guaina metallica $f_c = 0.30$

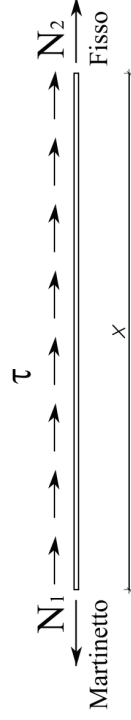
Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.60 -

Perdite per attrito in rettilineo

Queste perdite dipendono essenzialmente dalla cura posta nella disposizione dei cavi all'interno del cassero prima del getto, cercando di evitare il serpeggiamento in pianta.

La perdita di tensione in rettilineo dipende linearmente da carico di trazione applicato e dalla lunghezza del tratto considerato:



$$\Delta N = N_1 \cdot f_L \cdot x$$

$$N_2 = N_1 (1 - f_L \cdot x)$$

$$\frac{\Delta N}{N_1} = f_L \cdot x$$

Per il coefficiente di attrito f_L , in assenza di dati sperimentali, si possono assumere i seguenti valori in funzione del tipo di superficie:

calcestruzzo liscio

$$f_L = 5 \times 10^{-3}$$

guaina metallica

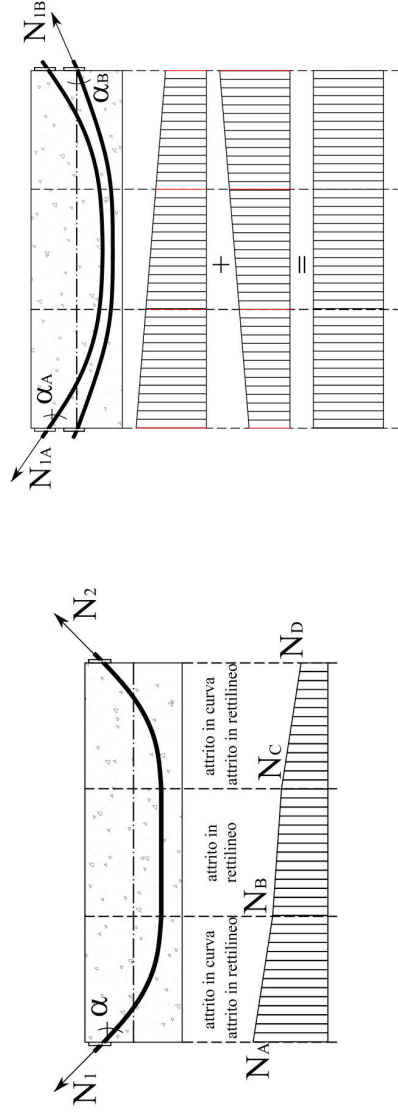
$$f_L = 3 \times 10^{-3}$$

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.61 -

Perdite per attrito lungo la trave

Se un cavo ha un tracciato curvilineo si dovranno sommare i due contributi, tenendo in considerazione l'attrito in rettilineo nel tratto lineare (in pianta), ma anche nel tratto di cavo curvo (in prospetto): nella lunghezza rettilinea x sono inclusi sia i tratti lineari sia quelli in curva, cioè tutta la lunghezza del cavo in pianta.



In conclusione, la tesatura da un solo lato è particolarmente svantaggiosa: per tale motivo, se non è possibile la doppia tesatura, in fase di esecuzione è bene prevedere almeno una tesatura alternata dei cavi, così da ottenere una sollecitazione di precompressione sufficientemente uniforme.

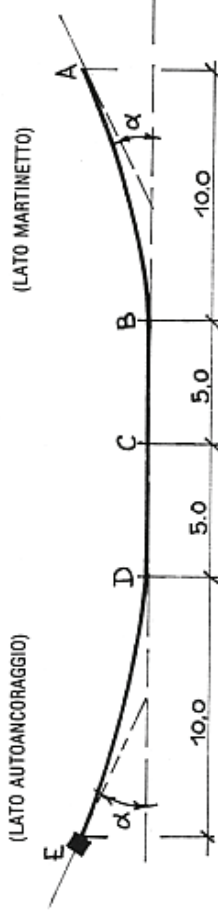
Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.62 -

Esempio

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

Si consideri un cavo da precompressione lungo 30m, bloccato all'estremo "E" e teso dal martinetto all'estremo "A" con una tensione di 1000 MPa.



$$\alpha = 20^\circ = \frac{20^\circ \pi}{180^\circ} = 0.349 \text{ rad}$$

$$\sigma_A = 1000 \text{ MPA}$$

$$f_c = 0.30$$

$$f_L = 3 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_B = \sigma_A - \sigma_A f_c \alpha - \sigma_A f_L x = 1000 - 1000 \times 0.3 \times 0.349 - 1000 \times 0.003 \times 10 = 865 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \sigma_B - \sigma_B f_L x = 865 - 865 \times 0.003 \times 5 = 852 \text{ MPa}$$

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.63 -

$$\sigma_D = \sigma_C - \sigma_C f_L x = 852 - 852 \times 0.003 \times 5 = 839 \text{ MPa}$$

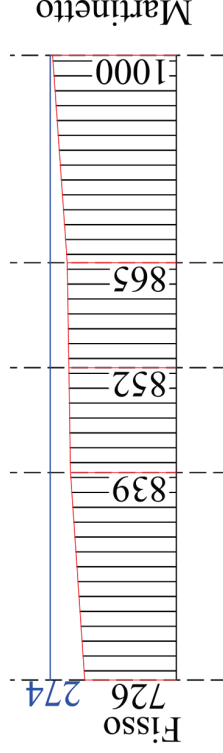
$$\sigma_E = \sigma_D - \sigma_D f_c \alpha - \sigma_D f_L x = 839 - 839 \times 0.3 \times 0.349 - 839 \times 0.003 \times 10 = 726 \text{ MPa}$$

Quindi in totale:

$$\sigma_A = 1000 \text{ MPa} \quad \sigma_E = 726 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma = 1000 - 726 = 274 \text{ MPa}$$

cioè pari a 27.4%



6.6.1.3. Perdite per deformazione elastica istantanea

Armatura post-tesa

Negli elementi ad armatura post-tesa la precompressione viene impressa in generale attraverso un certo numero N di cavi tesi non contemporaneamente.

Quando si parla di perdite per deformazione elastica istantanea non ci si riferisce all'accorciamento del calcestruzzo dovuto alla tesatura del cavo teso in quell'istante, ma all'accorciamento dei cavi tesi in precedenza, infatti la messa in tiro dell' n -esimo cavo provoca una caduta di tensione negli $N-1$ cavi tesati in precedenza.

Supponiamo di avere N cavi: alla tesatura del secondo cavo, il primo, già tesato, subirà una perdita pari a:

$$\Delta\sigma_{p,1} = E_p \Delta\epsilon_{p,1} = E_p \Delta\epsilon_c \quad \Delta\epsilon_c = \frac{\Delta\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_c}{N \cdot E_c}$$

dove:

$\Delta\epsilon_c$ è l'accorciamento del cls (fibra baricentrica) dovuto alla tesatura di un solo cavo;

$\Delta\sigma_c$ è tensione di compressione nel cls dovuta alla tesatura di un solo cavo;

σ_c è tensione di compressione nel cls finale dovuta alla tesatura degli N cavi.

$$\Delta\sigma_{p,i} = E_p \frac{\sigma_c}{N \cdot E_c} = n \frac{\sigma_c}{N}$$

$\Delta\sigma_{p,i}$ rappresenta la perdita parziale di un cavo alla tesatura del successivo.

$$\Delta\sigma_{p,i} = n \frac{\sigma_c}{N}$$

Complessivamente, si osserva che il primo cavo subisce (N-1) perdite, il secondo (N-2)... il penultimo (N-(N-1)) perdite e ovviamente l'ultimo cavo NON subisce perdite.

La perdita di tensione media negli (N-1) cavi risulta pari a:

$$\Delta\sigma_{p,media} = \frac{(N-1)}{2} n \frac{\sigma_c}{N}$$

Generalmente l'incidenza di questa perdita è modesta, all'incirca il 2% della tensione iniziale dell'acciaio.

Armatura pre-tesa

Nei sistemi ad armatura pre-tesa il fenomeno è diverso: infatti non è corretto pensare che l'accorciamento del cls produca una perdita di coazione.

Nel momento del trasferimento della pre-tensione al calcestruzzo questo subisce un accorciamento, come il cavo, ma l'energia potenziale totale di deformazione rimane invariata e l'accorciamento è indispensabile per mettere in coazione il cls.

In altri termini, la diminuzione di tensione nell'acciaio è la manifestazione del trasferimento dell'energia di deformazione elastica dall'acciaio (immagazzinato in fase di tesatura al banco) al calcestruzzo che si accorcia. Questa diminuzione di tensione è essenziale per avere la precompressione dell'elemento.

6.6.2. Perdite differite

6.6.2.1. Perdite per ritiro del calcestruzzo

Il **ritiro** è la proprietà del calcestruzzo di variare nel tempo il proprio volume, quindi di deformarsi, senza l'intervento di carichi esterni o tensioni applicate. Il ritiro presuppone una diminuzione di volume legata perdita d'acqua per evaporazione. Se la struttura è vincolata (quasi sempre) la diminuzione di volume è impedita, quindi nascono necessariamente delle trazioni e conseguenti fessure nell'elemento.

La deformazione da ritiro in un provino di calcestruzzo, risulta pari alla somma di due contributi:

$$\text{ritiro totale} = \text{ritiro da essiccamento} + \text{ritiro autogeno}$$

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca}$$

- il **ritiro da essiccamento** ϵ_{cd} (*drying shrinkage*) è dovuto essenzialmente al processo di diffusione dell'acqua presente nella pasta di cemento verso l'ambiente esterno:
 - si sviluppa lentamente e per molto tempo;
 - dipende dalla quantità d'acqua e del rapporto a/c;
 - dipende dalla qualità degli inerti e la loro capacità di assorbire acqua;
 - dipende dall'umidità relativa dell'ambiente;
 - può essere ridotto utilizzando additivi fluidificanti.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.68 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

Il valore medio del ritiro da essiccamento a tempo infinito (D.M.14/01/2008) è dato da:

$$\epsilon_{cd\infty} = k_h \cdot \epsilon_{c0}$$

ϵ_{c0} può essere valutato mediante le seguenti tabelle in funzione della resistenza caratteristica a compressione, dell'umidità relativa e del parametro h_0 :

f_{ck}	Umidità Relativa (in %)					
	20	40	60	80	90	100
20	-0,62	-0,58	-0,49	-0,30	-0,17	+0,00
40	-0,48	-0,46	-0,38	-0,24	-0,13	+0,00
60	-0,38	-0,36	-0,30	-0,19	-0,10	+0,00
80	-0,30	-0,28	-0,24	-0,15	-0,07	+0,00

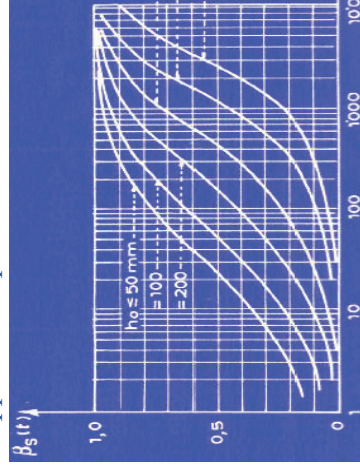
h_0 [mm]	k_h
100	1,00
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,70

per valori intermedi dei parametri indicati è consentita l'interpolazione lineare.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.69 -

Lo sviluppo nel tempo della deformazione $\epsilon_{cd}(t)$ può essere valutato come:



$$\epsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \epsilon_{cd\infty} = \beta_{ds}(t, t_s) k_h \cdot \epsilon_{c0}$$

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0.04 \sqrt{h_0^3}}$$

$$t_s \rightarrow \infty \quad \beta_{ds}(t, t_s) \rightarrow 1$$

dove:

t è l'età del calcestruzzo nel momento considerato (in giorni);

t_s è l'età del calcestruzzo a partire dalla quale si considera l'effetto del ritiro da essiccamento, normalmente il termine della maturazione, espresso in giorni;

k_h è un coefficiente che dipende dalla dimensione fittizia h_0 ;

h_0 è la dimensione fittizia (in mm) pari al rapporto $2A_c / u$, con:

A_c è l'area della sezione in calcestruzzo;

u è il perimetro della sezione in calcestruzzo esposto all'aria.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.70 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

– il ritiro autogeno o chimico ϵ_{ca} (*outogenous or endogeneous shrinkage*) corrisponde ai cambiamenti in volume associati alle reazioni chimiche della pasta di cemento durante il processo d'idratazione e non è influenzato dalle dimensioni dell'elemento strutturale:

- si sviluppa nei primi giorni dopo il getto
- aumenta al diminuire del rapporto a/c
- aumenta all'aumentare della densità della pasta di cemento
- per cls normali rappresenta mediamente solo il 5% del ritiro da essiccamento
- per cls alta resistenza fornisce valori confrontabili con il ritiro da essiccamento

Il valore del ritiro autogeno a tempo infinito è così valutato:

$$\epsilon_{ca,\infty} = -2.5(f_{ck} - 10) \times 10^{-6} \quad \text{con } f_{ck} \text{ in MPa}$$

Lo sviluppo nel tempo della deformazione $\epsilon_{ca}(t)$ può essere valutato come:

$$\epsilon_{ca} = \beta_{as}(t) \cdot \epsilon_{ca,\infty}$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(1 - 0.2t^{0.5}) \quad \text{con } t \text{ espresso in giorni}$$

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.71 -

Secondo la normativa precedente D.M. 1996, la deformazione finale da ritiro $\varepsilon_{es}(t_x, t_0)$ si valuta con le seguenti tabelle:

a) Atmosfera con umidità relativa di circa 75%

t_0	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
1 ÷ 7 giorni	0.26×10^{-3}	0.21×10^{-3}
8 ÷ 60 giorni	0.23×10^{-3}	0.21×10^{-3}
> 60 giorni	0.16×10^{-3}	0.20×10^{-3}

b) Atmosfera con umidità relativa di circa 55%

t_0	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
1 ÷ 7 giorni	0.43×10^{-3}	0.31×10^{-3}
8 ÷ 60 giorni	0.32×10^{-3}	0.30×10^{-3}
> 60 giorni	0.19×10^{-3}	0.28×10^{-3}

dove:

t_0 è l'età del calcestruzzo a partire dalla quale si considera l'effetto del ritiro, espresso in giorni;

α è la dimensione fittizia (in mm) pari al rapporto $2A_c / u$, con:

A_c è l'area della sezione in calcestruzzo;

u è il perimetro della sezione in calcestruzzo esposto all'aria.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.72 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

Nel caso della precompressione, il D.M.1996 semplifica ulteriormente imponendo (§4.3.4.8):

$\varepsilon_r = 0.0003$ ($=0.3\%$) se la struttura viene precompressa prima di 14gg di stagionatura

$\varepsilon_r = 0.00025$ ($=0.25\%$) se la struttura viene precompressa dopo 14gg di stagionatura

Per strutture particolarmente sottili si dovranno adottare valori maggiori.

In conclusione, la caduta di tensione nell'armatura di precompressione dovuta al ritiro è, nell'ipotesi che tale deformazione sia uniformemente distribuita, valutabile semplicemente in:

$$\Delta\sigma_{rt} = E_p \varepsilon_{rt}$$

Esempio:

si considera una struttura precompressa prima dei 14gg:

$$\varepsilon_r = 0.0003 = \varepsilon_c = \varepsilon_p$$

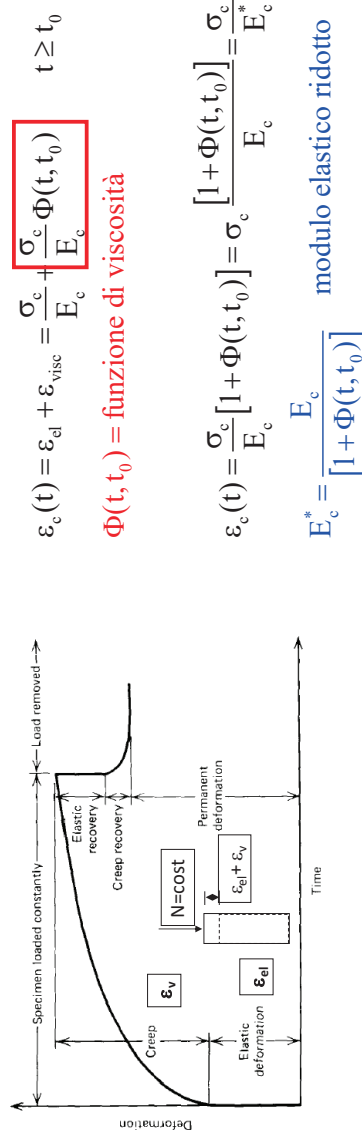
$$\Delta\sigma_p = E_p \varepsilon_p = 210000 \times 0.0003 = 63 \text{ MPa} \quad \text{perdita di tensione nell'acciaio}$$

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.73 -

6.6.2.2. Perdite per deformazione viscosa del calcestruzzo

Lo scorrimento viscoso del calcestruzzo, detta **viscosità**, **fluage** o **creep** consiste nell'aumento della deformazione nel tempo sotto l'applicazione di un carico costante (diverso da zero) oppure variabile. La viscosità del calcestruzzo è stata scoperta da Hatt nel 1907 e può essere rilevata mediante la prova di creep, cioè registrando la deformazione di un provino sottoposto, a partire da un certo istante t_0 , ad uno stato di tensione monoassiale costante nel tempo $\sigma_c(t_0)$.



La deformazione di origine viscosa dipende essenzialmente dalla tensione applicata al calcestruzzo e dall'istante della sua applicazione.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.74 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

Per livelli tensionali nel calcestruzzo inferiori a $0.45 f_{ck}$ è lecito considerare le deformazioni viscoso lineari con le tensioni, parlando di viscoelasticità lineare. In tal caso vale il principio di sovrapposizione degli effetti, che permette tra l'altro di sommare le deformazioni viscoso dovute a due o più carichi differenti applicati in tempi differenti:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_{c,1}}{E_c} [1 + \Phi(t, t_1)] + \frac{\sigma_{c,2}}{E_c} [1 + \Phi(t, t_2)] \quad t_2 \geq t_1$$

Annullando le tensioni applicate $\sigma_c=0$ (allo scarico), si osserva il recupero istantaneo della deformazione elastica, un lento recupero di una aliquota della deformazione viscosa in tempi lunghi, ma permane un residuo di deformazione plastica: a tempo infinito permane una deformazione non più recuperabile.

Anche in questo caso si possono distinguere due meccanismi che determinano la viscosità del calcestruzzo (Neville nel 1981 ha introdotto una nomenclatura usata ancora oggi):

1. si definisce basic creep la deformazione dipendente dal tempo che si determina quando il calcestruzzo viene sollecitato in assenza di scambio di umidità con l'ambiente (provini sigillati);

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.75 -

2. si definisce *drying creep* la deformazione aggiuntiva rispetto al basic creep che si osserva quando lo stesso calcestruzzo viene sollecitato in ambiente che consente l'essiccamento. A differenza del basic creep, il drying creep dipende dalle dimensioni e dalla forma dell'elemento strutturale per l'influenza che esse hanno sullo sviluppo del processo d'essiccamento.

I fattori che influenzano il comportamento viscoso sono i seguenti:

- la deformazione aumenta in ambienti a bassa umidità relativa (aria secca - elevata evaporazione);
- durata del carico e dalla sua eventuale ciclicità;
- diminuisce all'aumentare della stagionatura del calcestruzzo nel momento di applicazione del carico;
- dipende dal rapporto a/c ;
- aumenta all'aumentare della superficie esposta all'ambiente;
- dipende dalla temperatura ambientale.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.76 -

Secondo il **D.M. 14/01/2008**, la viscosità del calcestruzzo può essere valutata attraverso le seguenti tabelle, a patto che se lo stato tensionale del calcestruzzo, al tempo $t_0 = j$ di messa in carico, non è superiore a $0,45 \times f_{ckj}$, ($h_0 = 2A_c/u$ dimensione fittizia già definita in precedenza)

Tabella 11.2.VI – Valori di $\phi(\infty, t_0)$. Atmosfera con umidità relativa di circa il 75%

t_0	$h_0 \leq 75 \text{ mm}$	$h_0 = 150$	$h_0 = 300$	$h_0 \geq 600$
3 giorni	3,5	3,2	3,0	2,8
7 giorni	2,9	2,7	2,5	2,3
15 giorni	2,6	2,4	2,2	2,1
30 giorni	2,3	2,1	1,9	1,8
≥ 60 giorni	2,0	1,8	1,7	1,6

Tabella 11.2.VII - Valori di $\phi(\infty, t_0)$. Atmosfera con umidità relativa di circa il 55%

t_0	$h_0 \leq 75 \text{ mm}$	$h_0 = 150$	$h_0 = 300$	$h_0 \geq 600$
3 giorni	4,5	4,0	3,6	3,3
7 giorni	3,7	3,3	3,0	2,8
15 giorni	3,3	3,0	2,7	2,5
30 giorni	2,9	2,6	2,3	2,2
≥ 60 giorni	2,5	2,3	2,1	1,9

per valori intermedi dei parametri indicati è consentita l'interpolazione lineare.

Nel caso in cui sia richiesta una valutazione in tempi diversi da $t = \infty$ del coefficiente di viscosità questo potrà essere valutato secondo modelli tratti da documenti di comprovata validità (EC2).

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.77 -

Secondo il **D.M. 1996**, la viscosità del calcestruzzo può essere valutata attraverso le seguenti tabelle, a patto che lo stato tensionale del calcestruzzo, al tempo $t_0 = j$ di messa in carico, non sia superiore a $0,30 \times f_{ckj}$, ($\alpha = 2A_c/u$ dimensione fittizia già definita in precedenza)

a) Atmosfera con umidità relativa di circa 75%

t_0	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
3 ÷ 7 giorni	2.7	2.1
8 ÷ 60 giorni	2.2	1.9
> 60 giorni	1.4	1.7

b) Atmosfera con umidità relativa di circa 55%

t_0	$\alpha \leq 20$ cm	$\alpha \geq 60$ cm
3 ÷ 7 giorni	3.8	2.9
8 ÷ 60 giorni	3.0	2.5
> 60 giorni	1.7	2.0

per valori intermedi dei parametri indicati è consentita l'interpolazione lineare.

Ai fini della **precompressione**, il **D.M. 1996** fissa la deformazione viscosa pari a:

- 2 volte deformazione elastica ($\varepsilon_{visc} = 2 \varepsilon_{el}$) se il carico è applicato dopo i 14gg dal getto;
- 2.3 volte deformazione elastica ($\varepsilon_{visc} = 2.3 \varepsilon_{el}$) se il carico è applicato prima dei 14gg dal getto.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.78 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

In conclusione, la **caduta di tensione nell'armatura di precompressione dovuta alla viscosità del calcestruzzo** è valutabile semplicemente in:

$$\Delta\sigma_{visc} = E_p \varepsilon_{p,visc} = \Phi(\infty, t_0) \cdot n \cdot \sigma_c$$

con ε_{visc} = la deformazione viscosa della fibra di calcestruzzo posta al livello dell'armatura A_p ;

$n = 6$ rapporto reale fra i moduli elastici dell'acciaio e del calcestruzzo

Esempio:

si considera una stato tensionale nel calcestruzzo dovuta alla precompressione pari a $\sigma_c = 10$ MPa

$$\varepsilon_{visc} = \frac{\sigma_c}{E_{c,28}} \Phi(\infty, t_0) = \frac{10}{30000} \Phi(\infty, t_0) = \frac{\Phi(\infty, t_0)}{300}$$

si considera una struttura precompressa prima dei 14gg: $\Phi(\infty, t_0) = 2.3$

$$\varepsilon_{visc} = 2.3 \cdot \varepsilon_{el} = 2.3 \cdot \frac{10}{30000} = 7.66 \times 10^{-3}$$

$$\Delta\sigma_{visc} = E_p \varepsilon_{p,visc} = 2.1 \times 10^5 \times 7.66 \times 10^{-3} = 161 \text{ MPa}$$

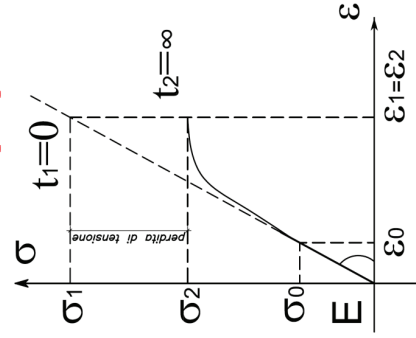
perdita di tensione nell'acciaio

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.79 -

6.6.2.3. Perdite per rilassamento dell'acciaio da precompressione

Gli stessi meccanismi che producono la viscosità nel calcestruzzo generano il **rilassamento dell'acciaio (fenomeno duale alla viscosità)**, che corrisponde ad una **variazione dello stato di tensione nel tempo, quando lo stato di deformazione rimane costante e diverso da zero**.



L'acciaio sollecitato da una tensione superiore al 50% della sua resistenza manifesta un comportamento viscoso. Nelle applicazioni correnti l'acciaio da precompressione è sollecitato ad una tensione pari al 50%-80% della sua resistenza, pertanto se un tirante (cavo da precompressione) viene allungato (teso) ed ancorato a due punti fissi, la deformazione si mantiene costante nel tempo mentre le tensioni decregono progressivamente (pari a 10÷20% del valore iniziale) a seguito della viscosità del materiale. Questo rilassamento delle tensioni di trazione determina le perdite di tensione nei cavi da precompressione

I fattori che influenzano il rilassamento dell'acciaio armonico sono i seguenti:

- rapporto fra tensione di trazione iniziale e tensione di snervamento σ_p / f_{pk} ;
- temperatura ambientale elevata.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.80 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

Secondo il **D.M. 14/01/2008**, la **caduta di tensione $\Delta\sigma_{pr}$ dovuta al rilassamento** dell'acciaio al tempo t , ad una temperatura di 20°C può essere valutata attraverso le seguenti:

$$\Delta\sigma_{pr}/\sigma_{pi} = 5,39 \rho_{1000} e^{6,7\mu} (t/1000)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5} \quad \text{per Classe 1}$$

$$\Delta\sigma_{pr}/\sigma_{pi} = 0,66 \rho_{1000} e^{9,1\mu} (t/1000)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5} \quad \text{per Classe 2}$$

$$\Delta\sigma_{pr}/\sigma_{pi} = 1,98 \rho_{1000} e^{8,0\mu} (t/1000)^{0,75(1-\mu)} 10^{-5} \quad \text{per Classe 3}$$

dove:

σ_{pi} è la tensione iniziale nell' i -esimo cavo;

ρ_{1000} è la perdita per rilassamento (in %) a 1000 ore dopo la messa in tensione, a 20°C e a partire da una tensione iniziale pari a $0.70 f_p$ del campione provato;

Classe di armatura	ρ_{1000}
Classe 1 – Treccce, filo o trefolo ordinario	8,0
Classe 2 – Treccce, filo o trefolo stabilizzato	2,5
Classe 3 – Barra laminata	4,0

$\mu = \sigma_{pi}/f_{pk}$

f_{pk} è la tensione caratteristica dell'acciaio da precompressione;

t è il tempo misurato in ore (h) dalla messa in tensione.

Le prime due espressioni si applicano, rispettivamente, ai fili, treccce e trefoli a normale rilassamento ed a basso rilassamento. La terza espressione si applica alle barre laminate a caldo.

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.81 -

Secondo il **D.M. 1996**, la caduta di tensione $\Delta\sigma_{pr}$ dovuta al rilassamento dell'acciaio a tempo infinito ($t=\infty$), ad una temperatura di 20°C e per una tensione iniziale di $0.75 f_{ptk}$, può essere valutata attraverso la seguente tabella:

tipo di armatura	$\Delta\sigma_{pr,\infty}$
Filo trafilato	$0.15 \sigma_{ypr}$
Treccia	$0.20 \sigma_{ypr}$
Trefolo	$0.18 \sigma_{ypr}$
Barra laminata	$0.12 \sigma_{ypr}$

Esempio:

si considera una tensione di trazione in una treccia da precompressione pari a $\sigma_p=1000$ MPa

$$\Delta\sigma_{pr} = 0.20 \times 1000 = 200 \text{ MPa}$$

6.6.2.4. Perdite di tensione lente totali

La caduta totale di tensione per i fenomeni differiti nel tempo nel calcestruzzo e nell'acciaio non è la somma delle cadute nel calcestruzzo (ritiro e viscosità) e di quelle dovute al rilassamento nell'acciaio: a causa del ritiro e della viscosità, le travi in c.a.p. si accorciano gradualmente verso un valore limite e con esse si accorciano le armature, diminuendo le perdite per rilassamento (i valori da normativa sono ricavati da prove di laboratorio a deformazione costante).

$$\Delta\sigma_{reale} \leq \Delta\sigma_{rit} + \Delta\sigma_{visc} + \Delta\sigma_{ril}$$

Secondo il **D.M. 1996**, per tener conto dell'influenza reciproca fra le tre cadute di tensione, si definisce una caduta per rilassamento ridotta $\Delta\sigma_{pr,\infty}^*$ così valutata (§4.3.4.3.):

$$\Delta\sigma_{pr,\infty}^* = \Delta\sigma_{pr,\infty} \left(1 - \frac{2.5(\Delta\sigma_{rit} + \Delta\sigma_{visc})}{\sigma_{spi}} \right)$$

con σ_{spi} tensione iniziale al tiro.

La caduta di tensione totale è data dalla:

$$\Delta\sigma_{tot} = \Delta\sigma_{rit} + \Delta\sigma_{visc} + \Delta\sigma_{ril}^* \quad \Delta\sigma_{ril}^* = \Delta\sigma_{rp,\infty}^*$$

Esempio:

Considerando gli esempi precedenti si ha:

$$\Delta\sigma_{rit} = 63 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{visc} = 161 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{ri} = 200 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{pr,\infty}^* = \Delta\sigma_{pr,\infty} \left(1 - \frac{2.5(\Delta\sigma_{rit} + \Delta\sigma_{visc})}{\sigma_{spi}} \right) = 200 \left(1 - \frac{2.5(63 + 161)}{1000} \right) = 200 \times 0.44$$

$$\Delta\sigma_{pr,\infty}^* = 88 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{tot} = 63 + 161 + 88 = 337 \text{ MPa}$$

$$\frac{\Delta\sigma_{tot}}{\sigma_{spi}} = \frac{337}{1000} = 33.7\%$$

Le cadute di tensioni lente si aggirano attorno al 30 % del tiro iniziale; a queste vanno aggiunte le perdite istantanee, per un totale in generale di circa 40% σ_{spi} .

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.84 -

Elementi strutturali in Cemento Armato Precompresso

L'Eurocodice 2, riporta la seguente espressione per tenere conto delle cadute di tensione lente (ritiro, viscosità e rilassamento):

$$\Delta P_{chs+r} = A_p \Delta \sigma_{p,chs+r} = A_p \frac{\varepsilon_{cs} E_p + 0,8 \Delta \sigma_{pr} + \frac{E_p}{E_{cm}} \varphi(t, t_0) \cdot \sigma_{c,op}}{1 + \frac{E_p A_p}{E_{cm} A_c} \left(1 + \frac{A_c z_{cp}^2}{I} \right) [1 + 0,8 \varphi(t, t_0)]} \quad (5.46)$$

dove:

$\Delta\sigma_{p,chs+r}$ è il valore assoluto della variazione di tensione nelle armature dovuta a viscosità, ritiro e rilassamento alla posizione x , all'istante t ;

ε_{cs} è la deformazione per ritiro stimata secondo il punto 3.1.4(6) in valore assoluto;

E_p è il modulo di elasticità dell'acciaio da precompressione, vedere punto 3.3.3 (9);

E_{cm} è il modulo di elasticità del calcestruzzo (prospetto 3.1);

$\Delta\sigma_{pr}$ è il valore assoluto della variazione di tensione nelle armature alla posizione x , al tempo t , per effetto del rilassamento dell'acciaio da precompressione. Esso è determinato per una tensione di:

$$\sigma_p = \sigma_p(G + P_{m0^+} \psi_2 Q)$$

dove $\sigma_p = \sigma_p(G + P_{m0^+} \psi_2 Q)$ è la tensione iniziale nelle armature dovuta alla precompressione iniziale e alle azioni quasi-permanenti;

$\varphi(t, t_0)$ è il coefficiente di viscosità all'istante t con applicazione del carico all'istante t_0 ;

Corso di Progetto di Strutture - a.a. 2016/17

- Pag. 6.85 -

$\sigma_{c,OP}$	è la tensione nel calcestruzzo adiacente alle armature, dovuta a peso proprio, precompressione iniziale e ad altre azioni quasi-permanenti ove presenti. Il valore di $\sigma_{c,OP}$ può essere l'effetto di parte del peso proprio e della precompressione iniziale, oppure l'effetto di una combinazione di azioni quasi permanente completa [$\sigma_p(G + P_{n0} + \psi_2 Q)$], a seconda della fase costruttiva in esame;
A_p	è l'area di tutte le armature di precompressione nella posizione x ;
A_c	è l'area della sezione di calcestruzzo;
I_c	è il momento d'inerzia della sezione di calcestruzzo;
Z_{op}	è la distanza tra il baricentro della sezione di calcestruzzo e le armature.