

V spazio vettoriale eulideo, $\dim(V) = n$

$F: V \rightarrow V$ ~~endomorfismo~~ endomorfismo autoaggiunto:

$$\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle \quad \forall u, v \in V$$

B base ON di V rispetto al $\langle, \rangle$ fissato. $B = (v_1, \dots, v_n)$

$$A = M_B^B(F) \rightarrow A \text{ è } \underline{\text{simmetrica}}: {}^t A = A$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V \\ \downarrow K_B & & \downarrow K_B \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{è } \underline{\text{commutativa}}. \text{ Cioè, per ogni } u \in V, \text{ se} \\ u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \text{ sia } F(u) = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n. \\ \text{Allora} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \end{array} \quad \underline{\text{SPIEGARE}}$$

Adesso sfrutteremo " $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ".

Innanzitutto $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Poi, la matrice A si può pensare ^(formalmente) ad entrate in $\mathbb{C}$. Allora

$$\overline{{}^t A} = {}^t A = A \Rightarrow A \text{ è una matrice } \underline{\text{hermiteiana}} \Rightarrow$$

le entrate di A , in realtà, sono in $\mathbb{R}$ / OMC...

$L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ è un endomorfismo autoaggiunto rispetto a $\langle, \rangle_{st}$ di $\mathbb{C}^n$.

Infine, ricordiamo che $\langle, \rangle_{st}$ di $\mathbb{C}^n$ "funziona" sugli elementi di $\mathbb{R}^n$, pensati come el. t. di $\mathbb{C}^n$, esattamente come $\langle, \rangle_{st}$ di $\mathbb{R}^n$.

Abbiamo la situazione:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^n$$

$$\cap \quad \cap$$

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{C}^n$$

$$p(t) = p_{L_A}(t) = p_A(t) = p_F(t) \quad \text{è sempre lo stesso polinomio.}$$

Sappiamo che, per il Teorema fondam. dell'Algebra tale polinomio si fattorizza

nel prodotto di n polinomi lineari del tipo $t - \lambda_i$.

Quindi a priori dovrebbe essere $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Ma ieri abbiamo visto che, essendo $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ endom. autoaggiunto dello spazio unitario $\mathbb{C}^n$, allora tutte le radici di $p_{L_A}(t)$ sono reali.

Quindi, passando per una situazione di algebra lineare sui numeri complessi (su $\mathbb{C}$) siamo riusciti a dimostrare che:

PROPOSIZIONE

Se V è uno spazio vettoriale euclideo, $\dim(V) = n$, e se $F: V \rightarrow V$ è un endomorfismo autoaggiunto, allora si ha la fattorizzazione $p_F(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ e $m_1 + \dots + m_r = n$.

Questo è esattamente quanto serve per far funzionare anche nel caso reale la dimostrazione data ieri per il Teorema spettrale per endomorfismi autoaggiunti di uno spazio unitario. ("OPERATORI")

Si ottiene così:

TEOREMA SPETTRALE PER ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI DI UNO SPAZIO EUCLIDEO

Sia $V, \langle, \rangle$ uno spazio vettoriale euclideo, e sia $F: V \rightarrow V$ un suo endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ON di V tutta formata da autovettri di F .

Vediamo (meglio di come fatto ieri...) come se ne ricava la versione matriciale.

Sia B una base ON di V . Allora, essendo F e. autagg., $A = M_B^B(F)$ è simmetrica.

Sia B la base ON, formata da autovettri di F di cui si parla

nell'enunciato qui sopra (il Teorema Spettrale dà come tesi l'esistenza di tale base).

$$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$$

$$F(u_j) = \lambda_j u_j$$

$$\forall j=1, \dots, n$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R}$$

Dunque

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} = D \quad \text{matrice diagonale}$$

$F(u_1) \quad F(u_2) \quad \dots \quad F(u_n)$

Oss. Se λ_j non sono necessariamente distinti, vedi sopra a pag. 2 l'enunciato della proposizione.

Consideriamo la situazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & V & \xrightarrow{F} V & \mathcal{B} \\ \uparrow \text{id}_V & & & \downarrow \text{id}_V \\ \mathcal{C} & V & \xrightarrow{F} V & \mathcal{C} \end{array}$$

il diagramma è commutativo

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = A$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = D$$

Esaminiamo, infine, le matrici di cambiamento di base:

(START)

$$P \stackrel{\text{def}}{=} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$$

$$(\text{e } P^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \dots)$$

$$\boxed{D = P^{-1}AP} \quad (1)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{matrix}$$

$u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n$

$\text{id}_V(u_1) \quad \text{id}_V(u_2) \quad \dots \quad \text{id}_V(u_n)$

$$\text{cioè } u_j = p_{1j}v_1 + \dots + p_{mj}v_m$$

Indichiamo le colonne di P con $P_1, \dots, P_m$.

Si ha

$\mathcal{B}$ è base ON risp. $\langle, \rangle$

$$\begin{aligned} \langle P_i, P_j \rangle_{st} &= \langle P_i, P_j \rangle_{st} = p_{1i}p_{1j} + p_{2i}p_{2j} + \dots + p_{mi}p_{mj} = \\ &= \langle p_{1i}v_1 + \dots + p_{mi}v_m, p_{1j}v_1 + \dots + p_{mj}v_m \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ è b. ON risp. $\langle, \rangle$

Quindi le colonne di P formano una base ON di $\mathbb{R}^n$ rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Cioè P è una matrice ortogonale.

$$(1) \Rightarrow D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

TEOREMA SPETTRALE PER MATRICI SIMMETRICHE

Se A è una matrice $n \times n$ simmetrica, allora esiste $P \in O(n)$ tale che tPAP è una matrice diagonale.

Le entrate della diagonale di D e la loro "multiplicità" sono univocamente determinate dalla matrice A .

Dim. Considera lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.

Poiché A è simmetrica, $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è endomorfismo autoaggiunto. Applicando a tale endomorfismo l'analisi fatta sopra (unica "differenza": la base B è la base canonica $e_1, \dots, e_n$). Proviamo, allora, la matrice ortogonale P t.c. tPAP è diagonale.

P ortogonale $\Rightarrow D = {}^tPAP = P^{-1}AP \Rightarrow A$ e D sono simili.

Allora le entrate sulla diagonale di D sono gli autovalori di A (di L_A), e le loro molteplicità sono le molt. geometriche di tali autovalori. Quindi è chiaro che "entrate" e "molteplicità" sono univocamente determinate da A .

Quest'ultimo ragionamento fatto (che inizia in START) è la dimostrazione di

LEMMA

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, e siano $B, \mathcal{B}$ basi ON di V , rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora la matrice di cambiamento di base $P = M_{\mathcal{B}}^B(\text{id}_V)$ è una matrice ortogonale.

Finora abbiamo visto il Teorema Spettrale prevalentemente dal punto di vista dei morfismi autoaggiunti. Ma la sua versione matriciale ci consente di applicarlo anche allo studio delle forme bilineari. Vediamo un importante caso concreto.

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$.

$B = (v_1, \dots, v_n)$ base (qualsiasi!) fissata di V .

A matrice $n \times n$, ad entrate reali. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ definisce rispetto a B la forma bilineare $\psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Cioè

$$(\textcircled{2}) \quad \psi(v_i, v_j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$$

Supponiamo che ψ sia un prodotto scalare, cioè che

- ψ sia bilineare (questo è sempre vero per come è stata definita ψ)
- ψ sia simmetrica $\Leftrightarrow$ A è simmetrica
- ψ sia definita positiva PBL: a quali condizioni sulla matrice A corrisponde questa proprietà?

Vorremmo determinare una serie di condizioni sulla matrice A che siano necessarie e sufficienti affinché la $\psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ associata ad A risp. alla base B sia un prodotto scalare.

ESEMPIO Se ψ è un prodotto scalare, allora si ha $a_{jj} = \psi(v_j, v_j) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ perché $v_j \neq 0$ essendo lin. indep.

Ma questa condiz. necessaria non basta.

Per il Teorema Spettrale esiste $P \in O(n)$ tale che

$${}^t P A P = P^{-1} A P = D \quad \text{è una matrice diagonale.}$$

L'uguaglianza $D = {}^t P A P$ ci dice che D è la matrice che

rappresenta φ rispetto alla base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$

di V , individuata come segue:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \Rightarrow u_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i$$

Ma allora:

$$d_{jj} = \varphi(u_j, u_j) > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Orsì $D = P^{-1}AP$, dunque D ed A sono simili, quindi hanno lo stesso pol. caratteristico $p_D(t) = p_A(t)$. Pertanto

$$\det(A) = \det(D) = \underbrace{d_{11}}_{>0} \underbrace{d_{22}}_{>0} \dots \underbrace{d_{nn}}_{>0} > 0 \quad \underline{\det(A) > 0}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{A_q} & \\ \hline & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \boxed{A_q} & \\ \hline & \end{array}} \right\} q$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_q$

A_q sia la sottomatrice $q \times q$ di A ottenuta intersecando le prime q righe di A con le prime q colonne.

$$A_1 = |a_{11}| \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \dots \quad A_n = A$$

A_q è la matrice che rappresenta la restrizione di φ a $\text{Span}(v_1, \dots, v_q)$ rispetto alla base $v_1, \dots, v_q$ di $\text{Span}(v_1, \dots, v_q)$. Tale restrizione è evidentemente un prodotto scalare su $\text{Span}(v_1, \dots, v_q)$. Per quanto visto sopra si ha, quindi:

$$\boxed{\det(A_q) > 0 \quad \forall q = 1, \dots, n}$$

Riassumendo:

se una matrice $n \times n$, ad entrate reali, A rappresenta risp. ad una base $\mathcal{B}$ di V un prodotto scalare su V , allora

1) A è simmetrica

2) $\det(A_q) > 0$ per ogni $q = 1, \dots, n$

Vala anche il viceversa !!!

Basta provare che la φ corrispondente è definita positiva. Poniamo $W_q := \text{span}(v_1, \dots, v_q)$. Allora

$\varphi|_{W_1}$ è def. da $|a_{11}|$ con $a_{11} > 0$, dunque è def. positiva.

Induttivamente, supponiamo che $\varphi|_{W_q}$ sia definita positiva con $1 \leq q < n$.

Applicando a $v_1, \dots, v_q$ il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo una base $w_1, \dots, w_q$ di W_q , ON risp. $\varphi|_{W_q}$. Sia

$S = M_{(v_1, \dots, v_q)}^{(w_1, \dots, w_q)} (\text{id}_{W_q})$ la matrice di cambiamento di base. S è di tipo $q \times q$. Allora

$$T = \begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{(q+1) \times (q+1)} = M_{(v_1, \dots, v_q, v_{q+1})}^{(w_1, \dots, w_q, w_{q+1})} (\text{id}_{W_{q+1}})$$

Quindi, la matrice $(q+1) \times (q+1)$ che rappresenta $\varphi|_{W_{q+1}}$ rispetto alla base $(w_1, \dots, w_q, w_{q+1})$ di W_{q+1} è:

$${}^t T A_{q+1} T = \begin{vmatrix} {}^t S & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_q & * \\ * & a_{q+1, q+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t S A_q & * \\ * & a_{q+1, q+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} {}^t S A_q S & * \\ * & a_{q+1, q+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_q & * \\ * & a_{q+1, q+1} \end{vmatrix}$$

questa è ancora una matrice simmetrica perché A_{q+1} è simmetrica.

$$\begin{vmatrix} I_q & \begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{matrix} \\ \alpha_1 \dots \alpha_q & a_{q+1, q+1} \end{vmatrix}$$

Opero su questa matrice con operazioni elementari:

$$\begin{vmatrix} I_q & \begin{matrix} \alpha_1 \\ * \\ \alpha_q \end{matrix} \\ \alpha_1 * \dots * & a_{q+1, q+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_q & \begin{matrix} -\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_q & \begin{matrix} 0 \\ * \\ \alpha_q \end{matrix} \\ \alpha_1 * \dots * & a_{q+1, q+1} - \alpha_1^2 \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{def. } E_1}$

$$\overbrace{\left| \begin{array}{c|c} I_q & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline -\alpha_1 & 0 \dots 0 \end{array} \right|}^{= {}^b E_1} \left| \begin{array}{c|c} I_q & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \alpha_1 * \dots * & a_{q+1,q+1} - \alpha_1^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} I_q & \begin{smallmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \alpha_2 \dots \alpha_q \end{array} \right| a_{q+1,q+1} - \alpha_1^2$$

Procedo in modo analogo per ottenere anche $\alpha_2, \dots, \alpha_q$

$M \stackrel{\text{def}}{=} T E_1 E_2 \dots E_q$ è una matrice invertibile ($\det(M) = \det(I) = 1$)

tale che

$${}^b M A_{q+1} M = \left| \begin{array}{c|c} I_q & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & a_{q+1,q+1} - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_q^2 \end{array} \right| \stackrel{\text{def}}{=} B$$

$$a_{q+1,q+1} - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_q^2 = \det(B) = \underbrace{\det(M)^2}_{>0 \text{ perché } \det(M) \neq 0} \underbrace{\det(A_{q+1})}_{>0 \text{ per ipotesi}} > 0 \quad (*)$$

Quella che abbiamo trovato con tutte queste giocate con le operazioni elementari è una nuova base $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_{q+1})$ di $W_{q+1} = \text{Span}(v_1, \dots, v_{q+1})$, tale che la restrizione di φ $\varphi| : W_{q+1} \times W_{q+1} \rightarrow \mathbb{R}$ si rappresenta rispetto alla base $\mathcal{C}$ con la matrice B .

La matrice B ci dice che la base $\mathcal{C}$ è ortogonale risp. $\varphi|_{W_{q+1}}$ (non ON!). Facendo i conti rispetto alla base $\mathcal{C}$, con la matrice B si vede subito che $\varphi|_{W_{q+1}}$ è definita positiva.

Per induzione si conclude che $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è def. positiva.

OSSERVAZIONE

Facendo le operazioni elementari che hanno portato a $\mathcal{C}$ si "stravolge" il sottospazio W_q di W_{q+1} .