

Il teorema spettrale serve per "lavori fini". Per "avere una prima idea" in tante situazioni spesso basta il

TEOREMA V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$, su $\mathbb{Q}$, ...) $\dim(V) = n \geq 1$. $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base di V , sin $\mathcal{B}$, tale che la matrice che rappresenta b rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale. Equivalentemente, ogni matrice A $n \times n$ è congruente ad una matrice diagonale.

^(data A simmetrica)
 Il t. spettrale dimostra l'esistenza di una matrice diagonale D alla quale A è sia congruente che simile, l'extra bonus! Reale D è sostanzialmente unica SPECI!, mentre le matrici diagonali fornite dal teorema precedente non lo sono.

Dim.

Per induzione su n . Se $n=1$ non c'è niente da dim.

Sia $n \geq 2$ ed il teorema sia vero per sp. vett. di $\dim \leq n-1$.

[Ricordiamo che $v \in V$ è detto isotropo rispetto a b se si ha $b(v, v) = 0$.

Se $b(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in V$, allora non c'è nulla da dimostrare.

Altrimenti, esistono $u, v \in V$ tali che $b(u, v) \neq 0$.

Mostriamo che allora esiste un vettore di V che non è isotropo. Se $b(u, u) \neq 0$ oppure $b(v, v) \neq 0$ l'abbiamo già trovato. Altrimenti

$$b(u+v, u+v) = \underbrace{b(u, u)}_{=0} + b(u, v) + b(v, u) + \underbrace{b(v, v)}_{=0} = 2b(u, v) \neq 0$$

b è simm. $\downarrow$

Dunque, sia $w_1 \in V$ tale che $b(w_1, w_1) \neq 0$, fissato.

Al solito: $U = \text{Span}(w_1)$. Nella Lezione 42 (il 7/12) abbiamo

provato che allora si ha $V = U \oplus U^\perp$. (*)

Da Grassmann segue $\dim(U^\perp) = n-1$. Consideriamo

b) : $U^\perp \times U^\perp \rightarrow \mathbb{R}$. Per l'ipotesi induttiva esiste una base $w_2, \dots, w_m$ di $U^\perp$ rispetto alla quale b) si rappresenta con una matrice diagonale.

(*) $\Rightarrow w_1, w_2, \dots, w_m$ è base di V , e la matrice che rappresenta b risp. $w_1, w_2, \dots, w_m$ è:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & a_{mm} \end{vmatrix} \quad a_{ii} = b(w_i, w_i) \quad i=1, \dots, m$$

$$\text{rg}(B) = \# \{a_{ii} \mid a_{ii} \neq 0\} \stackrel{\text{def}}{=} r$$

Cambiando eventualmente l'ordine dei $w_i, \dots, w_m$ è lecito assumere che

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{rr} \\ \hline & & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

(un intero p con $0 \leq p \leq r$ t.c.)
 Inoltre possiamo supporre che esistano
 per i t.c. $0 \leq i \leq p$ $a_{ii} > 0$
 per i t.c. $p < i \leq r$ $a_{ii} < 0$

(Se $p > 0$) sia $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\lambda_i > 0$ t.c. $\lambda_i^2 = -a_{ii}$ (questo è uno dei pochi punti del corso in cui usiamo una proprietà specificata del campo $\mathbb{R}$: l'esistenza della $\sqrt{}$ di un numero reale ≥ 0). Allora

$$B = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & a_{rr} & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}}_{m \times m} \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}}_{n \times n}$$

Un modo simile possiamo fare per tutti gli altri $a_{ii} > 0$.

ovvero sostituiamo w_i con $\frac{1}{\lambda_i} w_i$

Se $a_{jj} < 0$? Allora esiste $\mu_j \in \mathbb{R}$, $\mu_j > 0$ t.c. $\mu_j^2 = -a_{jj}$

quindi esiste un'opportuna matrice invertibile Q , diagonale (dunque ${}^tQ = Q$), tale che:

$$B = Q \begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} Q$$

tQ

Facciamo un passo indietro.

$B = (v_1, \dots, v_n)$ base arbitraria di V .

A : la matrice simmetrica $n \times n$ che rappresenta b risp. B .

Per il teorema precedente esiste una matrice invertibile P tale che $(B \text{ risp. } B \text{ rappresenta } b \text{ risp. } C = (w_1, \dots, w_n))$

${}^tPAP = B$ dove B è come sopra.

Abbiamo già dimostrato che matrici congruenti hanno lo stesso rango. Ma chi mi assicura che anche P sia lo stesso per matrici congruenti? Cioè:

a priori potrebbe esistere S matr. $n \times n$ invertibile tale che

$${}^tSAS = C = \begin{array}{c|c} c_{11} & 0 \\ \hline & c_{rr} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

ma il numero degli e.t. positivi tra $c_{11}, \dots, c_{rr}$ non è p .

Proviamo che non è così. Per assurdo.

Supponiamo, cioè, che esista una base $D = (u_1, \dots, u_n)$ di V rispetto alla quale b è data dalla matrice

$$\begin{array}{c|c} c_{11} & 0 \\ \hline & c_{rr} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

con $c_{11} > 0, \dots, c_{tt} > 0$ e $c_{t+1, t+1} < 0, \dots, c_{rr} < 0$

con $\underline{t} < p$

perfettamente

(il caso $t > p$ si tenta in modo analogo.)

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di V :

$$S = \text{span}(w_1, \dots, w_p) \quad T = \text{span}(u_{b+1}, \dots, u_n)$$

$$\dim(S) + \dim(T) = p + n - t > n \geq \dim(S+T) \quad \text{perché } t < p \quad \text{Quindi}$$

$$\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S+T) > 0 \Rightarrow S+T \neq \{0\}$$

cioè esiste $v \in S \cap T$, con $v \neq 0$. Si ha

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p = v = \beta_{b+1} u_{b+1} + \dots + \beta_n u_n$$

per opportuni α, β in $\mathbb{R}$. Infine

$$b(v, v) = \underbrace{a_{11}}_{>0} \underbrace{\alpha_1^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{a_{pp}}_{>0} \underbrace{\alpha_p^2}_{\geq 0} > 0 \quad \text{perché } v \neq 0_v. \quad \text{Ma anche}$$

$$b(v, v) = \underbrace{c_{b+1, b+1}}_{<0} \underbrace{\beta_{b+1}^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{c_{nn}}_{<0} \underbrace{\beta_n^2}_{\geq 0} + 0 \cdot \beta_{b+1}^2 + \dots + 0 \cdot \beta_n^2 \leq 0 \quad \text{assurdo}$$

Abbiamo così dimostrato il

TEOREMA (DI SYLVESTER)

Sia V spazio vett. su $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n \geq 1$, e sia $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica, di rango $r \leq n$. Allora esistono un numero intero $p \geq 0$ e $p \leq r$, che dipende solo da b , ed una base $\mathcal{E} = (t_1, \dots, t_n)$ di V tale che la matrice che rappresenta b rispetto ad $\mathcal{E}$ è

$$F = \begin{vmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La coppia $(p, r-p)$ è detta SEGNA-TURA di b ("F" come "finale")

Sappiamo trovare r in modo piuttosto semplice: applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss alla matrice A SPIEGA.

Ma come trovare "p"?

L'osservazione chiave è che tutte le matrici A, B, F

ESEMPIO

$V = \mathbb{R}^2$

$A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

$\det(A) \neq 0, \quad \underline{ac - b^2 \neq 0}$

$$p_A(t) = \det \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = (a-t)(c-t) - b^2 = ac - at - ct + t^2 - b^2$$

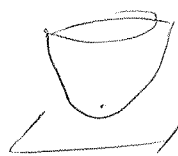
$$p_A(t) = t^2 - (a+t)c + \underbrace{ac - b^2}_{\neq 0} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Qui è più semplice ragionare direttamente

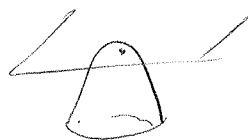
$p_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$

$\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 \neq 0$

λ_1	λ_2	
> 0	> 0	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
< 0	< 0	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
> 0	< 0	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$



minim.



max.

punto d.
sella