Appunti di complemento per le lezioni del corso di “Matematica Finanziaria”

L’OPERAZIONE DI AMMORTAMENTO

Premessa

Il presente testo di appunti è stato scritto per fornire agli studenti un supporto didattico aderente alla trattazione degli ammortamenti, così com'è stata svolta a lezione. È da intendersi quindi come testo integrativo rispetto ai paragrafi 5.4 e 5.5 del libro G. Castellani, M. De Felice, Franco Moriconi, "Manuale di finanza - I. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni", per brevità indicato in seguito come Libro. La trattazione dell'argomento non è pertanto esaustiva e si rimanda, dove opportuno, al Libro.

1. Operazione di rendita e operazione di ammortamento

Si definisce *rendita* una operazione finanziaria costituita da un insieme finito o infinito di pagamenti positivi, periodici, detti *rate* della rendita quale, per esempio, l'operazione:

$$\mathbf{r/s} = \{R_1, R_2, ..., R_m\} / \{1, 2, ..., m\}.$$

Talvolta si usa parlare di *operazione di rendita* riferendosi ad una operazione di scambio di un importo S esigibile, di solito, in una data antecedente alla scadenza della prima rata, con la rendita **r**. Più precisamente si parla di operazione di rendita in senso proprio se si fa riferimento alla parte che effettua l'investimento, pagando S per poi ricevere le rate. Viceversa, dal punto di vista della controparte, si tratta, più precisamente, di una operazione di rimborso o *ammortamento* di un debito S mediante il pagamento delle rate di ammortamento $R_1, R_2, ..., R_m$:

$$\mathbf{x/t} = \{S, -R_1, -R_2, ..., -R_m\} / \{0, 1, 2, ..., m\}.$$

Gli ammortamenti costituiscono l'argomento della matematica finanziaria in cui ci si pone il problema di definire le modalità di restituzione del debito S, detto anche somma mutuata (con riferimento ad un contratto di mutuo) e di corresponsione degli interessi. La somma mutuata può essere restituita in unica soluzione, al momento del pagamento dell'ultima rata, oppure un po' alla volta nel corso dell'operazione, si parla in tal caso di ammortamenti progressivi. In ogni caso, l'operazione deve soddisfare le due seguenti condizioni:

a) l'operazione deve essere equa secondo la legge di capitalizzazione composta o esponenziale, al tasso di interesse periodale i coerente con la periodicità di pagamento delle rate (condizione di equità);

b) l'importo mutuato S deve venire restituito completamente (condizione di chiusura).

Esistono vari tipi di ammortamenti, che sono utilizzati nella pratica e che si possono fare rientrare in due schemi generali: gli ammortamenti a rate posticipate e gli ammortamenti a rate anticipate.

2. L'ammortamento a rate posticipate

L'operazione di ammortamento a rate posticipate è la seguente:

$$\mathbf{x/t} = \{S, -R_1, -R_2, ..., -R_m\} / \{0, 1, 2, ..., m\}$$

dove la rata R_k si compone di un una *quota capitale* C_k (con $C_k \geq 0$) e di una *quota interesse* I_k (v. anche il paragrafo 1.2.3 del Libro):

$$R_k = C_k + I_k \qquad k = 1, 2, ..., m.$$

Le rate devono soddisfare la condizione di equità

$$S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

e le quote capitale, che vengono pagate per restituire il debito S, devono soddisfare la condizione di chiusura

$$\sum_{k=1}^{m} C_k = S.$$

Per determinare le quote interesse, introduciamo la nozione di debito residuo.
Definiamo D_k il *debito residuo* in k, valutato dopo il pagamento della rata R_k.

Si ha

$$D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k = 1, ...,m-1$$

ed è inoltre $D_0 = S$ e $D_m = 0$.

Poiché la quota interesse I_k, esigibile in k, matura nell'intervallo $[k-1, k]$ sul debito residuo valutato all'inizio dell'intervallo, le quote interesse sono determinate nel modo seguente

$$I_k = i\ D_{k-1} \qquad k = 1, 2, ... , m.$$

Sussiste un importante legame tra la nozione di debito residuo e quella di montante.
Consideriamo il problema dell'estinzione anticipata del prestito in un istante t, con $k \le t < k+1$.
Il montante in t dell'operazione finanziaria **x/t** è (v. la definizione di montante al paragrafo 4.5 del Libro)

$$M(t,\mathbf{x}) = S\ (1+i)^t - \sum_{h=1}^{k} R_h (1+i)^{t-h}.$$

rappresenta la somma da pagare in t per estinguere il debito S, avendo già pagato anche le rate R_h, h = 1, ... , k; infatti, l'operazione finanziaria

$$\{S,-R_1,-R_2,...,-R_k,-M(t,\mathbf{x})\}/\{0,1,2,...,k,t\}$$

risulta equa.

Pertanto il montante M(t,**x**) rappresenta il debito residuo in t.

Si ha allora che il montante M(k,**x**), k = 0, ..., m, rappresenta il debito residuo in k, dopo il pagamento delle rate R_h, h=1, ... , k, in quanto è la somma da pagare per estinguere anticipatamente il prestito.

Proviamo che si ha

$$M(k,\mathbf{x}) = D_k \qquad k = 0, ...,m$$

<u>Dimostrazione</u>

Si dimostra per induzione sfruttando la relazione ricorrente del montante (v. il paragrafo 4.5 del Libro):

$$M(k,\mathbf{x}) = M(k-1, \mathbf{x})\ (1+i) - R_k, \quad k = 1, 2, ... , m.$$

Poiché $M(0,\mathbf{x}) = S = D_0$ è provata la base induttiva.

Proviamo il passo induttivo, cioè che se

$$M(k,\mathbf{x}) = D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h$$

allora si ha

$$M(k+1,\mathbf{x}) = S - \sum_{h=1}^{k+1} C_h = D_{k+1}$$

È infatti

$$M(k+1,\mathbf{x}) = M(k, \mathbf{x})\,(1+i) - R_{k+1} = M(k, \mathbf{x})\,(1+i) - I_{k+1} - C_{k+1} =$$
$$= D_k\,(1+i) - I_{k+1} - C_{k+1}$$

Poiché $I_{k+1} = i\ D_k$ si ha

$$M(k+1,\mathbf{x}) = D_k - C_{k+1} = S - \sum_{h=1}^{k} C_h - C_{k+1} = S - \sum_{h=1}^{k+1} C_h = D_{k+1}\,.$$

Infine, se k = m si ha

$$M(m,\mathbf{x}) = 0 = D_m\,.$$

■

Proviamo infine che se le quote capitale sono assegnate in modo da soddisfare la condizione di chiusura

$$\sum_{k=1}^{m} C_k = S$$

e se le quote interesse sono determinate nel modo seguente

$$I_k = i\ D_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

con $D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h$, k = 1, 2, ... , m-1, il debito residuo dopo il pagamento della rata R_k , $D_0 = S$ e $D_m = 0$, allora le rate soddisfano la condizione di equità

$$S - \sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = 0\,.$$

<u>Dimostrazione</u>

Dalla relazione ricorrente per il montate si può scrivere la relazione ricorrente per il debito residuo:

$$D_k = D_{k-1}\,(1+i) - R_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Si ha allora

$$R_k = D_{k-1}\,(1+i) - D_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $(1+i)^{-k}$ e sommando si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = D_0 - D_m (1+i)^{-m} = S$$

ed è così provata la condizione di equità.

■

Poiché l'operazione finanziaria **x/t** è equa, si ha: W(k,**x**) = M(k,**x**) + V(k,**x**) = 0, quindi

$$M(k,\mathbf{x}) = -V(k,\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Si ha pertanto

$$D_k = M(k,\mathbf{x}) = -V(k,\mathbf{x}) =$$
$$= -\left(-R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \ldots - R_m(1+i)^{-(m-k)}\right),\ k = 0, 1, \ldots, m\text{-}1.$$

Si noti che il valore residuo V(k,**x**) ha il significato di bilancio finanziario dell'operazione finanziaria **x/t** e si ha V(k,**x**)<0 per k<m e V(m,**x**)=0. Con questo significato, il valore residuo può essere valutato ad un tasso di valutazione i′ diverso dal tasso i per il quale l'operazione finanziaria è equa. In questo caso si ha

$$V(k,\mathbf{x}) = -R_{k+1}(1+i')^{-1} - R_{k+2}(1+i')^{-2} - \ldots - R_m(1+i')^{-(m-k)}$$

e se $i' \neq i$ si ha $V(k,\mathbf{x}) \neq M(k,\mathbf{x})$.

Esempi di ammortamenti a rate posticipate sono i seguenti:

- ammortamento con restituzione del capitale in unica soluzione (v. i paragrafi 1.2.6 e 5.5.4 del Libro) in cui $C_k = 0$, per k = 1, ... , m–1 e $C_m = S$;
- ammortamento a quote capitale costanti (v. i paragrafi 1.2.6 e 5.5.2 del Libro) in cui $C_k = S/m$, per k = 1, ... , m;
- ammortamento a rate costanti (v. i paragrafi 1.2.6, 5.4.1 e 5.5.1 del Libro).

3. L'ammortamento a rate anticipate

L'operazione di ammortamento a rate anticipate è la seguente:

$$\mathbf{x/t} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{m-1}\} / \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

dove la rata R_k si compone di un una *quota capitale* C_k (con $C_k \geq 0$) e di una *quota interesse* I_k:

$$R_k = C_k + I_k \qquad k = 0, 1, \ldots, m\text{-}1.$$

Si noti che indichiamo con R_k la rata pagata in k, k = 0, 1, ..., m-1.

Se, in particolare, $R_0 = C_0$ cioè $I_0 = 0$, si ha un ammortamento a rate posticipate con debito iniziale $D_0 = S - C_0$ e rate di ammortamento $R_1, R_2, \ldots, R_{m-1}$ tali che $\sum_{k=1}^{m-1} C_k = S - C_0$.

Se, invece, $R_0 = C_0 + I_0$ con $I_0 > 0$, siamo propriamente nel caso dell'ammortamento a rate anticipate in cui le quote interesse sono pagate in via anticipata.

Se $C_0 = 0$ e $I_0 > 0$ si ha l'*ammortamento con anticipazione degli interessi*, in cui le quote interesse sono anticipate e le quote capitale sono posticipate.

Le rate devono soddisfare la condizione di equità

$$S - \sum_{k=0}^{m-1} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

e le quote capitale devono soddisfare la condizione di chiusura

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_k = S.$$

Per quanto riguarda la definizione di debito residuo, affinché sussista come nell'ammortamento a rate posticipate l'uguaglianza tra debito residuo e montante in k, occorre modificare opportunamente sia la definizione di debito residuo sia quella di montante.

Definiamo D_k^-, k = 0, 1, ... , m, il *debito residuo* in k prima del pagamento della rata R_k. Si ha allora:

$$D_k^- = S - \sum_{h=0}^{k-1} C_h = \sum_{h=k}^{m-1} C_h \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

ed è inoltre $D_0^- = S$ e $D_m^- = 0$.

Poiché la quota interesse I_k, esigibile in k, matura nell'intervallo $[k, k+1]$, data la definizione di debito residuo D_k^-, le quote interesse sono determinate nel modo seguente

$$I_k = d\ D_{k+1}^- \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

essendo d = i /(1+i) il tasso di interesse anticipato.

Per quanto riguarda il montante in k, k = 0, 1, ... , m, modifichiamo l'usuale definizione di montante valutando il montante in k, prima del pagamento della rata R_k. Si definisce allora

$$M^-(k, \mathbf{x}) = S(1+i)^k - \sum_{h=0}^{k-1} R_h (1+i)^{k-h}, \quad k = 1, \ldots, m$$

e si pone $M^-(0, \mathbf{x}) = S$.

Si ha allora che il montante in k, $M^-(k, \mathbf{x})$, ha il significato di somma da pagare in k per estinguere il debito S, avendo già pagato anche le rate R_h, h = 0, ... , k-1; infatti, l'operazione finanziaria

$$\{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{k-1}, -M^-(k, \mathbf{x})\} / \{0, 1, 2, \ldots, k-1, k\}$$

risulta equa.

Pertanto il montante $M^-(k, \mathbf{x})$ rappresenta il debito residuo in k prima del pagamento della rata R_k, in quanto è la somma da pagare per estinguere anticipatamente il prestito.

Proviamo che si ha

$$M^-(k, \mathbf{x}) = D_k^- \qquad k = 0, \ldots, m.$$

<u>Dimostrazione</u>

Si dimostra per induzione sfruttando la seguente relazione ricorrente del montante

$$M^-(k, \mathbf{x}) = [\, M^-(k-1, \mathbf{x}) - R_{k-1}\,]\ (1+i), \quad k = 1, \ldots, m$$

che si verifica immediatamente. Si ha infatti

$$\begin{aligned} M^-(k, \mathbf{x}) &= S\ (1+i)^k - \sum_{h=0}^{k-1} R_h (1+i)^{k-h} = \\ &= [\, S\ (1+i)^{k-1} - \sum_{h=0}^{k-2} R_h (1+i)^{k-1-h} - R_{k-1}\,]\ (1+i) = \\ &= [\, M^-(k-1, \mathbf{x}) - R_{k-1}\,]\ (1+i). \end{aligned}$$

Dalla relazione ricorrente per il montante in k dell'operazione finanziaria **x/t** si ha allora:

$$M^-(k-1, \mathbf{x}) = M^-(k, \mathbf{x})\ (1+i)^{-1} + R_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Poiché $M^{-}(m,\mathbf{x}) = 0$, per la posizione $D_m^{-} = 0$ è provata la base induttiva:

$$M^{-}(m,\mathbf{x}) = 0 = D_m^{-}.$$

Proviamo il passo induttivo, cioè che se

$$M^{-}(k,\mathbf{x}) = D_k^{-} = S - \sum_{h=1}^{k-1} C_h$$

allora si ha

$$M^{-}(k-1,\mathbf{x}) = S - \sum_{h=1}^{k-2} C_h = D_{k-1}^{-}$$

È infatti

$$M^{-}(k-1,\mathbf{x}) = M^{-}(k,\mathbf{x})\,(1+i)^{-1} + R_{k-1} = D_k^{-}\,(1+i)^{-1} + C_{k-1} + d D_k^{-} =$$

$$= D_k^{-}\left((1+i)^{-1} + d\right) + C_{k-1} = D_k^{-}\left((1+i)^{-1} + 1 - (1+i)^{-1}\right) + C_{k-1} =$$

$$= D_k^{-} + C_{k-1} = S - \sum_{h=1}^{k-1} C_h + C_{k-1} =$$

$$= (C_k + C_{k+1} + \ldots + C_{m-1}) + C_{k-1} = S - \sum_{h=1}^{k-2} C_h = D_{k-1}^{-}.$$

Infine, se k = 0 si ha

$$M^{-}(0,\mathbf{x}) = M^{-}(1,\mathbf{x})\,(1+i)^{-1} + R_0 = D_1^{-}\,(1+i)^{-1} + C_0 + d D_1^{-} =$$

$$= D_1^{-}\left((1+i)^{-1} + d\right) + C_0 = D_1^{-}\left((1+i)^{-1} + 1 - (1+i)^{-1}\right) + C_0 =$$

$$= D_1^{-} + C_0 = (C_1 + C_2 + \ldots + C_{m-1}) + C_0 = S = D_0^{-}.$$

È così provato che $M^{-}(k,\mathbf{x}) = D_k^{-}$, k = 0, 1, ... , m.

■

Proviamo che se le quote capitale sono assegnate in modo da soddisfare la condizione di chiusura

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_k = S.$$

e se le quote interesse sono determinate nel modo seguente

$$I_k = d\ D_{k+1}^{-} \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

con $D_k^{-} = S - \sum_{h=0}^{k-1} C_h = \sum_{h=k}^{m-1} C_h$, k = 1, 2, ... , m-1, il debito residuo prima il pagamento della rata R_k,

$D_0^{-} = S$ e $D_m^{-} = 0$, allora le rate soddisfano la condizione di equità

$$S - \sum_{k=0}^{m-1} R_k (1+i)^{-k} = 0.$$

<u>Dimostrazione</u>

Dalla relazione ricorrente per il montate si può scrivere la relazione ricorrente per il debito residuo:

$$D_{k+1}^{-} = [\,D_k^{-} - R_k\,]\,(1+i), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Si ha allora

$$R_k = D_k^- - D_{k+1}^- \left(1+i\right)^{-1} \quad , \quad k = 0, 1, \dots , m\text{-}1.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $(1+i)^{-k}$ e sommando si ottiene

$$\sum_{k=1}^{m} R_k (1+i)^{-k} = D_0^- - D_m^- (1+i)^{-m} = S\,.$$

È così provata la condizione di equità.

■

Poiché l'operazione finanziaria **x/t** è equa, si ha: W(k,**x**) = 0. Affinché sussista la scomposizione del valore in montante e valore residuo, considerando la definizione di montante $M^-(k,\mathbf{x})$ occorre modificare opportunamente la definizione di valore residuo.

Si definisce

$$V^-(k,\mathbf{x}) = -R_k - R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \dots - R_{m\text{-}1}(1+i)^{-(m\text{-}1-k)}$$

Essendo W(k,**x**) = $M^-(k,\mathbf{x}) + V^-(k,\mathbf{x})$ = 0, si ha allora

$$M^-(k,\mathbf{x}) = -V^-(k,\mathbf{x})\,, \quad k = 0, 1, \dots , m\text{-}1.$$

Si ha pertanto

$$D_k^- = M^-(k,\mathbf{x}) = -V^-(k,\mathbf{x}) =$$
$$= -\left(-R_k - R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \dots - R_{m\text{-}1}(1+i)^{-(m\text{-}1-k)}\right), \; k = 0, 1, \dots , m\text{-}1,$$

ed è inoltre $D_m^- = M^-(m,\mathbf{x})$ = W(m,**x**) = 0.

Si noti che il valore residuo $V^-(k,\mathbf{x})$ ha il significato di bilancio finanziario dell'operazione finanziaria **x/t** e si ha $V^-(k,\mathbf{x})$ <0 per k<m e $V^-(m,\mathbf{x})$ =0. Con questo significato, il valore residuo può essere valutato ad un tasso di valutazione i' diverso dal tasso i per il quale l'operazione finanziaria è equa. In questo caso si ha

$$V^-(k,\mathbf{x}) = -R_k - R_{k+1}(1+i')^{-1} - R_{k+2}(1+i')^{-2} - \dots - R_{m\text{-}1}(1+i')^{-(m\text{-}1-k)}$$

e se $i' \neq i$ si ha $V^-(k,\mathbf{x}) \neq M^-(k,\mathbf{x})$.

Esempi di ammortamenti a rate anticipate sono i seguenti:

- ammortamento con restituzione del capitale in unica soluzione e quote interesse anticipate in cui C_k = 0, per k = 0, ... , m–1 e C_m = S; I_k = d S, per k = 0, 1, ... , m-1;
- ammortamento con anticipazione degli interessi in cui si hanno quote interesse anticipate e quote capitale posticipate; quindi $R_0 = I_0$, $R_k = C_k + I_k$ per k = 1, ..., m-1, $R_m = C_m$;
- ammortamento a rate costanti anticipate (v. il paragrafo 5.4.2 del Libro).