LEZIONE 46 19/12/16

PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$

Vogliamo associare a due qualsiasi vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$ un opportuno vettore di $\mathbb{R}^3$ che indicheremo con $u \wedge v$ (talvolta si trova anche $u \times v$): il prodotto vettoriale di u, v COMPONENTI

Supp., innanzitutto, u, v lin. indipendenti.

$W = \text{Span}(u, v)$, $\dim(W) = 2 \Rightarrow \dim(W^\perp) = 3 - 2 = 1$

Sia $g \in W^\perp$ tale che valgono le seguenti condizioni:

$\|g\| = 1$ (g è un versore risp $\langle , \rangle_{st}$) e

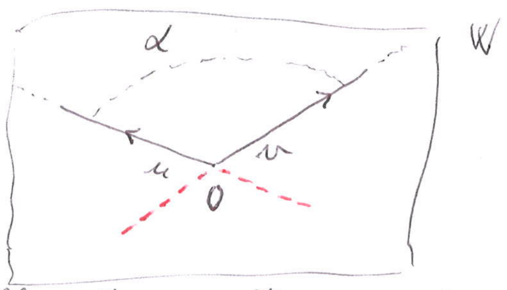
$$\underbrace{\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & g \end{array} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & g_1 \\ u_2 & v_2 & g_2 \\ u_3 & v_3 & g_3 \end{vmatrix} \end{array} > 0}$$

solo due elementi di $W^\perp$ verificano questa condizione, perché $\dim(W) = 1$

Cerchiamo di capire il significato di questa condizione.

Pensiamo W come un piano affine

Allora $\{\lambda u \mid \lambda \geq 0\}$ e $\{\mu v \mid \mu \geq 0\}$ sono due semirette in tale piano, con la stessa origine O.

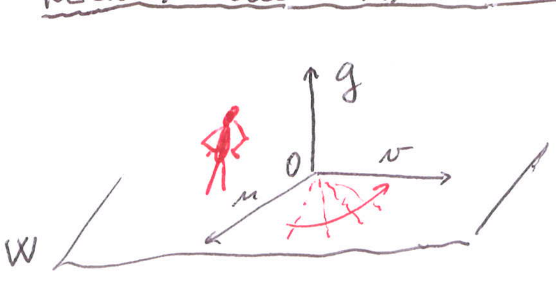


Queste semirette non sono contenute nella stessa retta perché u, v sono lin. indip.

Le semirette suddividono il piano W in due angoli con gli stessi lati.

Uno di questi contiene il prolungamento dei lati (a. concavo), l'altro no (angolo convesso). Noi siamo interessati a questo secondo angolo. Sia α la sua ampiezza (in radianti)

REGOLA della MANO DESTRA

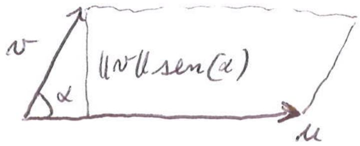


Il verso di g è quello "piedi-testa" di un osservatore che, posto su W, vede la rotazione di u su v attraverso l'angolo convesso avvenire in senso antiorario.

$u \wedge v \overset{def.}{=} \underbrace{\|u\| \cdot \|v\| \operatorname{sen}(\alpha)}_{\in \mathbb{R}}\, g$ u, v lin. dip. : $u \wedge v \overset{def}{=} \underline{0} \in \mathbb{R}^3$

$0 < \alpha < \pi \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) > 0 \Rightarrow \|u \wedge v\| \overset{\|g\|=1}{=} \|u\| \cdot \|v\| \operatorname{sen}(\alpha)$

Osserviamo che $\|u \wedge v\|$ è l'area del parallelogramma di lati u, v



Riassumendo

$u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u, v$ sono linearmente dipendenti

Altrimenti $u \wedge v$ ha

- direzione ortogonale sia ad u che a v
- verso "piedi - testa" di un osservatore ---
- modulo uguale all'area del parallelogramma di lati u, v

queste condiz. permettono di usare $u \wedge v$ in Fisica.

Vale $\boxed{u \wedge v = -v \wedge u}$

ESEMPIO e_1, e_2, e_3 : base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora

$\boxed{e_1 \wedge e_2 = e_3}$ $\boxed{e_1 \wedge e_3 = -e_2}$ $\boxed{e_2 \wedge e_3 = e_1}$

ESEMPIO

$e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2$ $(e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = \underline{0} \wedge e_2 = \underline{0}$

Dunque il prodotto vettoriale non è associativo.

~ o ~

$\operatorname{Span}(u)^\perp$ ha equazione $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$ se $u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}$

cioè $\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases}$ (*)

$\operatorname{Span}(v)^\perp$ ha equazione

u, v lin. indip. $\Leftrightarrow rg \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 2$

In tal caso le sol. di (*) sono lo span di :

$$(1) \quad \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \overset{def}{=} \tilde{\pi} \qquad \underline{\pi \neq 0}$$

Studiamo il vettore $\bar{u}$:

- $\bar{u} \perp u$ e $\bar{u} \perp v$. Infatti

$$\langle \bar{u}, u \rangle_{st} = \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

[regola di Laplace applicata all'ultima riga

Analogamente si vede che $\langle \bar{u}, v \rangle_{st} = 0$

- $$\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_2 & v_2 & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_3 & v_3 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = \|\bar{u}\|^2 > 0$$

regola di Laplace applicata all'ultima colonna

perché $\bar{u} \neq 0 \Rightarrow \|\bar{u}\| > 0$

Quindi $\bar{u}$ ha direzione e verso uguali a quelli di $u \wedge v$.

- $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) =$

$= \|u\|^2 \|v\|^2 - \underbrace{\|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2(\alpha)}_{} = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2$

$=$ conti $= \langle u, v \rangle_{st}$ $= \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_{st} = \|\bar{u}\|^2$

Dunque si ha anche $\|\bar{u}\| = \|u \wedge v\|$. Pertanto $\underline{\bar{u} = u \wedge v}$

Quindi la (1) fornisce $u \wedge v$ in coordinate.
Se u, v sono linearmente dipendenti, la (1) fornisce il vettore nullo, quindi funziona anche in questo caso.

~o~

Con un pò di conti dalla (1) segue che $\underline{\wedge \text{ è bilineare}}$:

$(u + u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$ $\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda u) \wedge v = \lambda\, u \wedge v = u \wedge (\lambda v)$

e analoga.

<u>ESEMPIO</u>

$u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ $\quad$ analogamente $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

$u_i, v_j \in \mathbb{R} \quad \forall i, \forall j$

$$u \wedge v = (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) =$$

$$= u_1 v_1 \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{=0} + u_1 v_2 \, e_1 \wedge e_2 + \dots + u_2 v_1 \underbrace{e_2 \wedge e_1}_{=-e_1 \wedge e_2} + \dots =$$

$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{=e_3} + \dots = \left(\dots, \dots, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

<u>Prodotto misto</u> di $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

Sviluppiamo il determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

con la regola di Laplace secondo la terza riga, oppure la prima riga. Otteniamo

$$\boxed{\langle u \wedge v, w \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle}$$

Si noti che l'<u>ordine</u> dei tre vettori nei due membri è lo stesso.

<u>prodotto misto di u, v, w</u>

SPIEG.

Un calcolo a pag. 3 mostra che

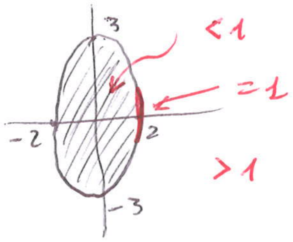
$$\|u \wedge v\|^2 = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \end{vmatrix}$$

Partiamo da un problema molto concreto:

Che cosa rappresenta la condizione "$9x^2+4y^2-36<0$"?

Cioè: quali sono i punti del piano cartesiano che la soddisfano?

$$9x^2+4y^2-36<0 \iff \frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}-1<0 \iff \underbrace{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1}_{\text{è sodd. da } (0,0)}$$



Quindi, quando si capisce la condizione "$\ldots = 1$", ci si arrangia con "$\ldots < 1$".

Cosa dire del problema analogo

$$2x^2+6xy-y^2+3x-5y+1>0 \quad ?$$

Chi è l'insieme dei punti (x,y) di $\mathbb{R}^2$ che verificano

$$2x^2+6xy-y^2+3x-5y+1=0 \quad ?$$

Vorremmo usare le forme bilineari, sulle quali sappiamo tanto. Il "prezzo" da pagare è

$$(x,y) \longleftrightarrow (x,y,\underbrace{1}_{\text{costante!}})$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix}}_{A} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = 2x^2+6xy-y^2+3x-5y+1$$

A matrice simmetrica 3×3.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{vmatrix}}_{3\times 3 \text{ simm}} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9x & 4y & -36 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = 9x^2+4y^2-36$$

La prima cosa interessante da considerare è $rg(A)$.
Vediamo di considerarlo, innanzitutto, nei casi noti:

1) Circonferenza $\qquad x^2+y^2+ax+by+c=0$

2) Parabola $\qquad ax^2-y+bx+c=0$

3) Ellisse $\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\underset{NB}{\underline{-1}}=0$

4) Iperbole $\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

Però abbiamo anche

5) Due rette

$$(y-3x+2)(y+x+1)=y^2+\underline{xy}+y\underline{-3xy}-3x^2-3x+2y+2x+2$$

$$=-3x^2-2xy+y^2-x+3y+2$$

5') Due rette parallele

$$(y-mx-q)(y-mx-r)=y^2\underline{-mxy}-ry\underline{-mxy}+m^2x^2+mrx-qy+mqx+qr$$

$$=m^2x^2-2mxy+y^2+m(q+r)x-(q+r)y+qr$$

6) Una retta "contata due volte"

$$(y-mx+q)^2=y^2+m^2x^2+q^2-2mxy-2qy+2mqx=$$

$$=m^2x^2-2mxy+y^2+2mqx-2qy+q^2$$