LEZIONE 47

CONICHE

$\mathbb{E}^2$ piano affine metrico ($\mathbb{R}^2$ e $\langle\, ,\, \rangle_{st}$) $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ (x,y) coordinate

Def. Chiamiamo CONICA il luogo di tutti i punti di $\mathbb{E}^2$, le cui coordinate verificano un'equazione del tipo

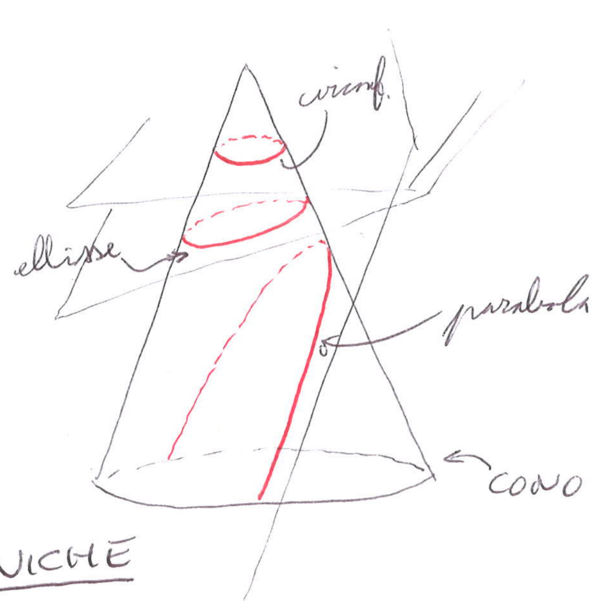
(1) $\quad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \qquad$ "a" $\in\mathbb{R}$

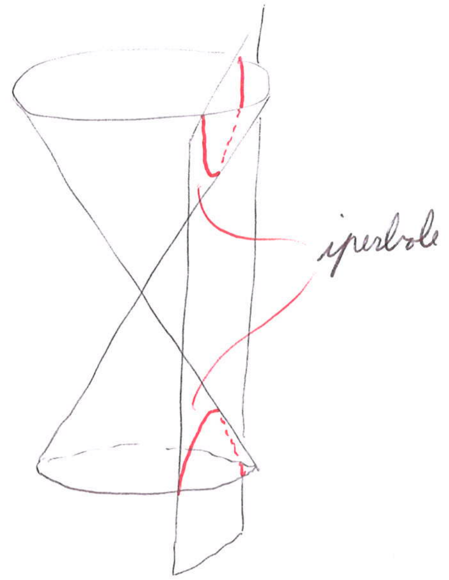
dove $(a_{11},a_{12},a_{22})\neq(0,0,0)$ SPIEG.

Cioè vogliamo che l'equazione (1) sia proprio di grado 2 in x,y.

ESEMPI NOTI

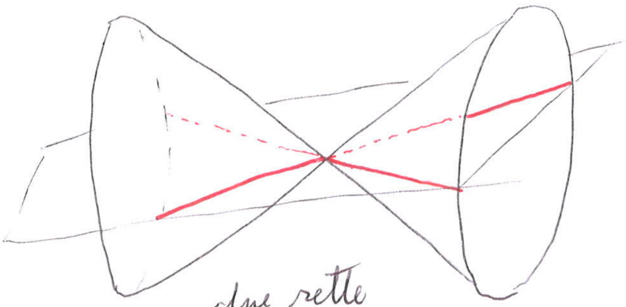
Circonferenze
Parabole
Ellissi
Iperboli



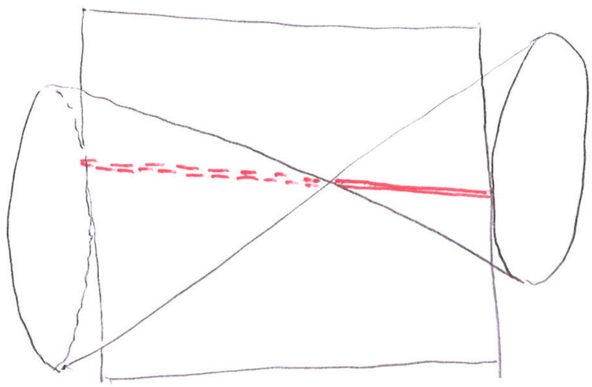


(SEZIONI) CONICHE

Però si ha anche



due rette incidenti



Cioè: per speciali posizioni del piano che sega il cono si possono ottenere due rette incidenti (se il piano passa per il vertice del cono), o una retta "da contarsi due volte".

~ o ~

Impostiamo lo studio da un punto di vista più algebrico. $\mathbb{E}^2 \ni (x,y) \longleftrightarrow (x,y,1)$ non aggiunge o toglie info

la (1) si riscrive
Allora il 1° membro di (1) si scrive così:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = 0$$

A'

prodotto righe per colonne; la matrice simmetrica 3×3 in mezzo verrà indicata con A.

Per i nostri scopi sarà importantissima la matrice 2×2

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

mai nulla per ipotesi.

ESEMPIO 1 : ELLISSE e IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

SPIEGARE

$$A = \begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{vmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$

ELLISSE	$\det(A') > 0$
IPERBOLE	$\det(A') < 0$

ESEMPIO 2 : PARABOLA

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \underline{a \neq 0} \qquad ax^2 + bx - y + c = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} a & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{vmatrix}$$

$\det(A) = \frac{1}{4} a \neq 0$

$\boxed{\det(A') = 0}$

ESEMPIO 3 : CIRCONFERENZA

centro (x_0, y_0) raggio $r > 0$ da $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ è il teorema di Pitagora!
si ricava

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2x_0}_{a} x \underbrace{-2y_0}_{b} y + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_{c} = 0$$

$x_0 = -\frac{a}{2} \qquad y_0 = -\frac{b}{2} \quad \Rightarrow$

$\underbrace{\frac{a^2}{4}}_{x_0^2} + \underbrace{\frac{b^2}{4}}_{y_0^2} - c = r^2 > 0$ cioè $\underline{a^2+b^2-4c>0}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & b/2 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \qquad \det(A) = c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = -\frac{a^2+b^2-4c}{4} \ \underline{\underline{\neq 0}}$$

Il punto <u>importante</u> per noi è $\det(A') = 1 > 0$. $\Rightarrow$ <u>dobbiamo pensare la circonferenza come una particolare ellisse</u>.

<u>ESEMPIO 4</u> : <u>UNA RETTA "CONTATA DUE VOLTE"</u>

Consideriamo una retta $r \subset \mathbb{E}^2$ di equaz. $ax+by+c=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$.

$(ax+by+c)^2 = a^2x^2 + 2ab\,xy + b^2y^2 + 2acx + 2bcy + c^2 = 0$

$$A = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c|ccc|} a & a & b & c \\ b & a & b & c \\ c & a & b & c \end{array}$$

$|a \ b \ c| \neq |0 \ 0 \ 0|$

Dunque $\underline{rg(A) = 1}$

In particolare: $\underline{\det(A)=0}$

Si può vedere che se si parte da due rette distinte r, s e si moltiplicano le loro equazioni, allora la matrice A che si ottiene ha rango 2 $(\Rightarrow \det(A)=0)$.

Una conica C per la quale si ha $\det(A)=0$ si dice <u>degenere</u>. Se C è unione di due rette distinte, allora $rg(A)=2$, se C è una retta contata due volte, allora $rg(A)=1$.

ATTENZIONE $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ simmetrica $\rightsquigarrow$ la (1) corrisp. è $1=0$

non ci sono soluzioni (x,y) ....

Altro problema $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow x^2+y^2=0$

che da l'unica soluzione $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
Ma su $\mathbb{C}$ $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=0$ $x+iy=0$ è l'eq. di una retta in $\mathbb{C}^2$ e analog. per $x-iy=0$.

Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica, e sia $f: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ un'isometria.
Vogliamo capire che cos'è $f(C)$.
Anche $f^{-1}: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ è un'isometria. Sia
$f^{-1}\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}$ allora esiste una matrice ortogonale $M \in O(2)$
tale che
$$f^{-1}\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$
Si vede subito che questo equivale a (SPIEGARE!)

$$\left|\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} \qquad P \overset{\text{def}}{=} \left|\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \qquad \det(P) = \det(M) \overset{M \in O(2)}{=} \pm 1 \quad (2)$$

(2) $\Rightarrow$ P è invertibile. Inoltre, da (2) segue anche:

(3) $\det({}^tPAP) = \det(A)$

Ora $(X,Y,1) \in f(C) \iff f^{-1}(X,Y,1) \in C$ cioè: $P\begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} \in C \iff$

${}^t\left(P\begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix}\right) A P \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} = 0$ ovvero $\underbrace{|X\ Y\ 1|\ {}^tPAP \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} = 0}$ (4)

${}^tPAP$ è matrice simm 3x3 $\Rightarrow$ è l'eq. di una conica ioè $f(C)$ è una conica.

Si noti che ${}^tPAP$ è congruente ad A, dunque ha lo stesso rango di A. In particolare:

C conica non-degenere $\Longrightarrow$ $f(C)$ non è degenere.

Analizziamo meglio la matrice $B = {}^tPAP$:

$$\left|\begin{array}{c|c} {}^tM & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline p \quad q & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} A' & \begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix} \\ \hline a_1 \quad a_2 & a_0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix}p\\q\end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} {}^tMA' & \begin{matrix}*\\*\end{matrix} \\ \hline * \quad * & * \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix}p\\q\end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} {}^tMA'M & \begin{matrix}**\\**\end{matrix} \\ \hline ** \quad ** & ** \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$B' = {}^tMA'M = M^{-1}A'M \Longrightarrow p_{B'}(t) = p_{A'}(t) \Longrightarrow$$

$M \in O(2)$

$$\Longrightarrow \boxed{\det(A') = \det(B') \quad e \quad tr(A') = tr(B')}$$

$$a_{11} + a_{22} = b_{11} + b_{22}$$

Grazie a (3) sappiamo, quindi, che

$\det(A), \det(A'), tr(A')$ sono invarianti per isometrie

ESEMPIO

$C \subset \mathbb{E}^2$ abbia equazione $5x^2 + 26xy + 5y^2 + 62x + 46y + 5 = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 13 & 31 \\ 13 & 5 & 23 \\ 31 & 23 & 5 \end{vmatrix}$$

$\det(A) = 10.368 \neq 0 \qquad 10.368 = 2^7 \cdot 3^4$

e C è conica non-degenere

$$A' = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} \qquad \det(A') = 5^2 - 13^2 = 25 - 169 = -144 < 0 \Longrightarrow$$

C è un'iperbole

Si può dimostrare che esiste un'isometria $f : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ tale che $f(C)$ abbia un'equazione del tipo:

$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$ la matrice di $f(C)$ è $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = B$

Ma allora, per quanto visto sopra:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = \det(B) = \det(A) = 10.368 = 2^7 \cdot 3^4 \\ \alpha\beta = \det(B') = \det(A') = -144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ \alpha+\beta = \mathrm{Tr}(B') = \mathrm{Tr}(A') = 10 \end{cases}$$

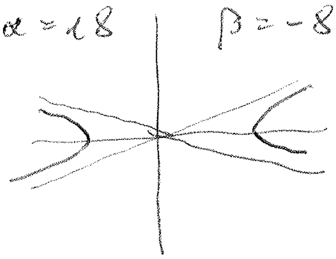
da cui

$$\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta} = -\frac{2^7 \cdot 3^4}{2^4 \cdot 3^2} = -2^3 \cdot 3^2 = \underline{-72}$$

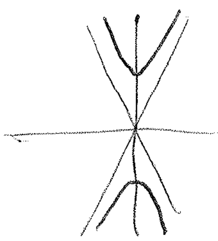
α, β sono le radici dell'equazione $T^2 - 10T - 144 = 0$ cioè 18 e -8.

__Non__ è possibile assolutamente stabilire se $\alpha = 18$ e $\beta = -8$ o viceversa

$\alpha = 18$ $\beta = -8$



$\alpha = -8$ $\beta = 18$



le due coniche sono isometriche.

Sia $\alpha = 18$ $\beta = -8$. Allora $f(C)$ ha equazione

$18x^2 - 8y^2 - 72 = 0$ $\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1}$

Trovare effettivamente l'isometria f equivale a determinare la matrice P. Per questo, è lecito supporre:

$M \in SO(2)$ cioè $M = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}$

Allora dobbiamo risolvere:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ p & q & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 13 & 31 \\ 13 & 5 & 23 \\ 31 & 23 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) & p \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & q \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5\cos+13\,sen & 13\cos+5\,sen & 31\cos+23\,sen \\ -5\,sen+13\cos & -13\,sen+5\cos & -31\,sen+23\cos \\ 5p+13q+31 & 13p+5q+23 & 31p+23q+5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos & -sen & p \\ sen & \cos & q \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5\cos^2+13\,sen\cos+13\,sen\cos+5\,sen^2 & -\cancel{5\,sen\cos}-13\,sen^2+13\cos^2+\cancel{5\,sen\cos} \\ -5\,sen\cos\cancel{+13\cos^2}-13\,sen^2+5\,sen\cos & 5\,sen^2-13\,sen\cos-13\,sen\cos+5\cos^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5p\cos+13p\,sen+13q\cos+5q\,sen+31\cos+23\,sen \\ -5p\,sen+13p\cos-13q\,sen+5q\cos-31\,sen+23\cos \\ 5p^2+13pq+31p+13pq+5q^2+23q+31p+23q+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 5+26\,sen(\alpha)\cos(\alpha)=18 \\ \cos(\alpha)-sen(\alpha)=0 \end{cases}$$

$26\,sen^2(\alpha)=13 \qquad sen^2(\alpha)=\frac{1}{2}$

$\boxed{sen(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \boxed{\cos(\alpha)=sen(\alpha)} \neq 0$

$5p+13p+13q+5q+31+23=0 \qquad 18p+18q=-54$

cioè $\boxed{p+q=-3}$

$-5p+13p-13q+5q-31+23=0 \qquad 8p-8q=8 \qquad \boxed{p-q=1}$

$p=q+1 \Rightarrow 2q+1=-3 \qquad \boxed{q=-2} \qquad \boxed{p=-1}$

~~5+2~~6