

## Esercizi n. 7

**key words:** successione di funzioni, convergenza puntuale, convergenza uniforme, continuità del limite, teorema dei due limiti, passaggi al limite sotto il segno, serie di funzioni, convergenza totale.

1) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1-x & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2) Trovare il limite puntuale e dire se c'è convergenza uniforme per

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

3) Calcolare al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_n (\sqrt[1+\alpha]{1+(nx)^\alpha} - \sqrt[1+\alpha]{(nx)^\alpha}) \quad \text{per } x \in ]0, +\infty[.$$

Dire per quali valori di  $\alpha$  la convergenza è uniforme.

4) Si consideri la successione di funzioni  $(f_n)_n$ , con

$$n \geq 1, \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+x^2}.$$

- (i) Si determini l'insieme sui cui se  $(f_n)_n$  è puntualmente convergente e se ne calcoli il limite puntuale.
- (ii) Detto  $f$  il limite puntuale di  $(f_n)_n$ , si dica se la successione delle  $f_n$  ristrette al dominio  $[-1, 1]$  sia uniformemente convergente a  $f$  ristretta al medesimo dominio.
- (iii) Si provi che  $(f_n)_n$  non converge uniformemente a  $f$  su tutto l'insieme di convergenza puntuale.
- (iv) Si consideri la serie  $\sum_n (-1)^n f_n$ . Si dica se è convergente su  $[-1, 1]$ . Si dica se la convergenza è uniforme.

5) Trovare l'insieme di convergenza  $E$  delle serie di seguito indicate e dire su quali sottoinsiemi di  $E$  c'è convergenza totale

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n|x^2-x|}}{n \log^2 n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}\right), \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}.$$

6) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^n.$$

- (i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
- (ii) Relativamente alla serie del punto (i) si provi che la convergenza è uniforme su tutto l'insieme di convergenza.
- (iii) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{ax}{1+x^2} \right)^n,$$

dove il parametro  $a$  è un numero reale positivo. Si determinino i valori di  $a$  per i quali la serie è convergente uniformemente su  $\mathbb{R}$  e in questo caso si calcoli la somma della serie.

7) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}.$$

- (i) Si determini l'insieme di convergenza  $E$  della serie.
- (ii) Si osservi che per ogni  $x \in E \cap ]-\infty, 0[$  la serie verifica le condizioni di Leibniz. Si utilizzi la formula di stima dell'errore per provare che la serie converge uniformemente su  $E \cap ]-\infty, 0[$ .
- (iii) Si provi che la serie non converge uniformemente su  $E \cap ]0, +\infty[$ .