PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2016/17

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Prof. Dario Portelli

Trieste, 26/1/2017

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate

1.- In $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottoinsiemi

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

$$K = \text{Span}((0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0))$$

- i) Si verifichi che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, si determini la sua dimensione ed una sua base.
- ii) Si determini la dimensione ed una base di $H + K$. Si tratta di una somma diretta?
- iii) Si costruisca un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia K come nucleo ed H come immagine.

2.- Se $u = |u_1 \ u_2|$ e $v = |v_1 \ v_2|$ sono due qualsiasi elementi di $\mathbb{R}^2$, si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(u, v) := 2u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5u_2v_2$$

- i) Si verifichi che φ è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.
- ii) Si applichi il Teorema Spettrale per diagonalizzare la matrice A che rappresenta φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Cioè, si trovi una matrice ortogonale P , di tipo 2×2 , tale che tPAP sia diagonale.

(continua sul retro del foglio)

3.- Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da: $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + 7z \\ 6x + 2y - 6z \\ -4x + 6z \end{pmatrix}$.

- i) Si dica se f è diagonalizzabile. In caso affermativo si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f , e si determini anche la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto a tale base.
- ii) Si dica se f è un isomorfismo. In tal caso, f^{-1} è diagonalizzabile? Se lo è, chi sono gli autovalori? Chi sono gli autospazi?

4.- Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $P(0, -1, 1)$, $Q(0, 1, 1)$ ed $R_a(a, 0, 0)$, quest'ultimo dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che il piano affine $L_a \subset \mathbb{R}^3$ passante per P, Q, R_a sia parallelo alla retta affine di equazioni cartesiane

$$r \quad \begin{cases} y & = & 3 \\ x + z & = & 0 . \end{cases}$$

Si scrivano equazioni parametriche e cartesiane per tale piano, e si calcoli la sua distanza dall'origine.