ESERCIZI VARI di GEOMETRIA 1

Un ovvio consiglio Si giustifichi la risposta ad ogni esercizio (o parte di esercizio) posto in forma di domanda.

CAMPI

Esercizio 1. Sia K l' insieme di tutti i numeri reali che possono essere scritti nella forma $a + b\sqrt{2}$, dove a, b sono numeri razionali. Dimostrare che K è un campo. Stessa questione per l' insieme di tutti i numeri reali che possono essere scritti nella forma $a + b\sqrt{c}$, dove a, b, c sono numeri razionali, con $c > 0$ fissato.

Esercizio 2. Nell' insieme $\mathbb{R}^2$ sono definite le due operazioni

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \qquad (a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

Dimostrare che rispetto a tali operazioni $\mathbb{R}^2$ è un campo. L' insieme di tutte le coppie $(a, 0)$ è un sottocampo, isomorfo ad $\mathbb{R}$, ed infine, se $i := (0, 1)$, allora $i^2 = (-1, 0)$ che possiamo dunque identificare con -1 grazie all' isomorfismo cui si è alluso sopra. Questa è una costruzione del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Esercizio 3. Dimostrare che esiste un unico campo K costituito da due elementi.

SPAZI VETTORIALI

Esercizio 4. Con la solita somma e prodotto il campo $\mathbb{R}$ diventa uno spazio vettoriale sul sottocampo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$?

i) i numeri reali positivi;

ii) i numeri reali negativi;

iii) gli interi;

iv) i numeri razionali con denominatore $\leq N$;

v) tutti i numeri reali della forma $a + b\pi$, dove a e b sono numeri razionali arbitrari.

Esercizio 5. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi?

i) $\{ (x, y, z) \mid 2x - 5y + 3z = 0 \}$;

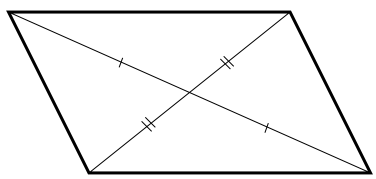
ii) $\{ (x, y, z) \mid xy = 0 \}$;

iii) $\{ (x, y, z) \mid 2y + 3z = 1 \}$;

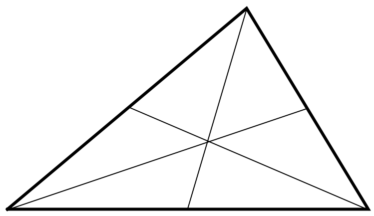
iv) $\{ (x, y, z) \mid 2x - 5y + 3z = 0 \text{ e } 3x + y - z = 0 \}$;

v) $\{ (x, y, z) \mid 2x^2 - 5y + 3z = 0 \}$;

Esercizio 6. Si provi utilizzando solo combinazioni lineari di vettori (ma non angoli, coordinate, applicazioni affini, etc.) che in un parallelogramma le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà.

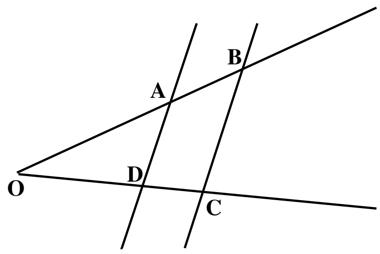


Esercizio 7. Si provi utilizzando solo combinazioni lineari di vettori (ma non angoli, coordinate, applicazioni affini, etc.) che le tre mediane di un triangolo passano tutte per uno stesso punto (il *baricentro* del triangolo), che divide ciascuna di esse in due parti, una il doppio dell' altra.

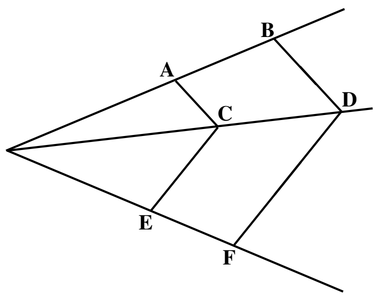


Esercizio 8. Si provi utilizzando solo combinazioni lineari di vettori (ma non angoli, coordinate, applicazioni affini, etc.) il Teorema di Talete

$$OA : OB \;=\; OD : OC \;=\; AD : BC$$

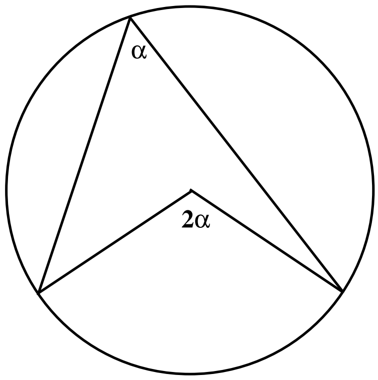


Esercizio 9. Si provi utilizzando solo combinazioni lineari di vettori (ma non angoli, coordinate, applicazioni affini, etc.) che, data la situazione come nella figura seguente



dall' essere AC parallela a BD , e CE parallela a DF segue che AE è parallela a BF .

Esercizio 10. Si provi utilizzando solo combinazioni lineari di vettori (ma non angoli, coordinate, applicazioni affini, etc.) che ogni angolo al centro è il doppio di ogni angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.



Esercizio 11. Sia X un insieme non vuoto qualsiasi, e sia V un K-spazio vettoriale. Verificare che l'insieme $Appl(X, V)$ di tutte le applicazioni $X \to V$ è uno spazio vettoriale su K rispetto alle seguenti operazioni. Presi comunque $f, g \in Appl(X, V)$ e $\lambda \in K$ definiamo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

per ogni $x \in X$. Nel caso particolare in cui $X = K = V = \mathbb{R}$, si verifichi che ciascuna delle seguenti famiglie è formata da vettori linearmente indipendenti di $Appl(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\{1, x\} \quad \{x, x^2\} \quad \{x, \sin(x)\} \quad \{\cos(x), \sin(x)\}$$
$$\{x, e^x\} \quad \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$$

Esercizio 12. In $\mathbb{R}$ pensato come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$, 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti? Che cosa si può dire per $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$?

Esercizio 13. Dimostrare che i vettori $(1, 3)$ e $(-2, 5)$ in $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti, e che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è una combinazione lineare di questi due vettori.

Esercizio 14. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono o meno linearmente indipendenti

$$v_1 = (2, 1, 1) \qquad v_2 = (1, 3, 1) \qquad v_3 = (-2, 1, 3)$$

Lo stesso per la terna

$$w_1 = (1, 0, 3) \qquad w_2 = (0, 1, 2) \qquad w_3 = (2, -3, 0)$$

Esercizio 15. Considerate le terne di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{cccc} \text{a)} & (-1,2,-3) & (5,0,1) & (2,1,-1) \\ \text{b)} & (0,1,-1) & (5,1,7) & (1,3,2) \\ \text{c)} & (1,2,3) & (5,7,1) & (0,-1,1) \\ \text{d)} & (1,2,-1) & (0,5,1) & (2,-1,-3) \end{array}$$

Per ciascuna di esse dire se costituisce o meno una base di $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo rappresentare il vettore $(-3,0,2)$ come combinazione lineare degli elementi della base data. Altrimenti trovare un vettore che non sia combinazione lineare dei vettori della terna assegnata.

Esercizio 16. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, e siano v_1 , v_2 due vettori linearmente indipendenti di V , Si verifichi che $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2$ sono ancora linearmente indipendenti. La proprietà precedente resta vera se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}_2$, l'unico campo con due elementi ?

Esercizio 17. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$, ove p è un numero primo, di dimensione n . Si calcoli quanti elementi ha V.

Esercizio 18. Siano v_1 , v_2 , v_3 vettori linearmente indipendenti di un K-spazio vettoriale V . Si verifichi che se la caratteristica del campo K è diversa da 2 (cioè se in K si ha $1+1 =: 2 \neq 0$) allora sono linearmente indipendenti anche i vettori $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$, $v_3 + v_1$. Che cosa si può dire della terna $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 - v_3 + v_2$, $v_1 + v_3 - v_2$?

Esercizio 19. Trovare basi per la somma e l' intersezione dei due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle\, (1,2,1,1), (2,3,1,0), (3,1,1,-2)\,\rangle$$

$$W = \langle\, (0,4,1,3), (1,0,-2,-6), (0,1,3,5)\,\rangle$$

Esercizio 20. Dati tre vettori v_1 , v_2 , v_3 di uno spazio vettoriale V , si dimostri che se $\langle\, v_1 , v_2 \,\rangle = \langle\, v_1 , v_3 \,\rangle$, allora v_1 , v_2 , v_3 sono linearmente dipendenti. Vale anche l' implicazione opposta ?

Esercizio 21. Sia V un K-spazio vettoriale e siano u, v, w tre vettori linearmente indipendenti di V.

- Provare che $u + v\,,\ v - w\,,\ u + 2w$ sono linearmente indipendenti.
- Posto $U := \langle\, u + v\,,\ v - w\,\rangle$ e $W := \langle\, u + 2w\,,\ v - w\,\rangle$, calcolare le dimensioni di U, W, $U \cap W$, $U + W$.

Esercizio 22. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, e sia $\{\, v_1\,,\ v_2\,, \ldots,\ v_n\,\}$ una sua base. Si dimostri che $\{\, v_1\,,\ v_2\,, \ldots,\ v_n\,,\ i\,v_1\,,\ i\,v_2\,, \ldots,\ i\,v_n\,\}$ è una base di V come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ove si è indicato $i = \sqrt{-1}$.

Esercizio 23. Dimostrare che i vettori (a, b) e (c, d) di $\mathbb{R}^2$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc \neq 0$$

Esercizio 24. Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $u = (1, 1, 0, 1)$ e $v = (0, -1, 2, 1)$. Determinare due basi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$ ciascuna delle quali contenga entrambi tali vettori. Si calcolino poi le coordinate di $w = (1, 2, 2, 1)$ sia rispetto ad $\mathscr{A}$ che a $\mathscr{B}$.

Esercizio 25. Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u = (1, 3, -2, 4) \qquad v = (-1, -1, 5, -9) \qquad w = (2, 0, -13, 23) \qquad t = (1, 5, 1, -2)$$

Trovare la dimensione ed una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ da essi generato.

Esercizio 26. Verificare che la seguente famiglia di vettori in $\mathbb{R}^4$ non è libera

$$u = (1, 1, 1, 0) \qquad v = (0, 1, 1, 0) \qquad w = (0, -1, 0, -1) \qquad t = (0, 0, -1, 1)$$

Estrarne una sottofamiglia libera con massimo numero di vettori e completarla in una base, utilizzando vettori della base canonica.

Esercizio 27. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ sono dati i vettori

$$u = (1, -1, 0, 0, 0) \qquad v = (0, 1, 1, 0, 0) \qquad w = (0, 1, 1, 0, -1)$$

Provare che sono linearmente indipendenti e costruire una base di $\mathbb{R}^5$ che li contenga.

Esercizio 28. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e sia $\mathscr{B} = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ una sua base. Indicheremo con x, y, z le coordinate di un generico vettore di V rispetto a $\mathscr{B}$. Infine, si considerino le relazioni

$$x' = 2y - z \qquad y' = x + y \qquad z' = x$$

- Verificare che tali relazioni si possono interpretare come le equazioni di un cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$.
- Scrivere i vettori di $\mathscr{B}'$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathscr{B}$.
- Scrivere il vettore $v = 3v_1 + v_3$ nella nuova base, e determinarne le coordinate.

Esercizio 29. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori $(1, 3, 4)$, $(3, t, 11)$ e $(-1, -4, 0)$ sono linearmente dipendenti ?

Esercizio 30. Sia K un campo considerato come spazio vettoriale su se stesso. Verificare che i suoi unici sottospazi sono $\{ 0 \}$ e K.

Esercizio 31. Siano U, W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$. Se quest' ultima condizione non è verificata, sussiste comunque qualche proprietà di sottospazio per l' insieme $U \cup W$?

Esercizio 32. Sia $\mathbb{R}[X]$ l' insieme dei polinomi a coefficienti reali, nell' indeterminata X. Ricordiamo che i polinomi

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \qquad\qquad b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_mX^m$$

sono uguali, *per definizione*, se $n = m$ e $a_i = b_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Verifica che $\mathbb{R}[X]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali, e che il sottoinsieme $\mathbb{R}[X]_2$ dei polinomi di grado ≤ 2 è un sottospazio.
- Prova che i polinomi $1\,,\ X-1\,,\ (X-1)^2$ costituiscono una base di $\mathbb{R}[X]_2$. Determinare le coordinate di $p(X) = 6 - 5X + 2X^2$ rispetto a tale base.
- Se $p(X) \in \mathbb{R}[X]_2$, indicheremo con $p'(X)$ la derivata prima di $p(X)$. Verificare che entrambi i sottoinsiemi di $\mathbb{R}[X]_2$

$$U = \{\, p(X) \,|\, p'(0) = 0 \,\} \qquad W = \{\, p(X) \,|\, p'(1) = 0 \,\}$$

  sono sottospazi. Dare una base di U, W, $U+W$, $U \cap W$.
- Trova una base di $\mathbb{R}[X]$.

Esercizio 33. I tre polinomi

$$1 + X + X^2 \ ,\ 2X + X^3 \ ,\ 2 + 2X^2 - X^3$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti in $K[X]$?

Esercizio 34. Si descriva il sottospazio V del $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale $\mathbb{Q}[X]$ generato dai polinomi

$$1 \ ,\ 2X^4 \ ,\ 3 \ ,\ 2X \ ,\ X^3 \ ,\ X$$

Il polinomio $\frac{3}{2} + X^2 - X^4$ appartiene a V? Il sottospazio generato da

$$1 \ ,\ \sqrt{2} \ ,\ X \ ,\ 2X \ ,\ 2X^3 \ ,\ \frac{3}{28}X^4$$

coincide con V?

Esercizio 35. Sia E lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dei polinomi nell' indeterminata X, a coefficienti complessi, di grado $\leq n$ (ove n è un numero naturale fissato), e sia a un numero complesso fissato. Dimostrare che i seguenti polinomi formano una base di E

$$1 \ ,\ X-a \ ,\ (X-a)^2 \ ,\ \ldots \ ,\ (X-a)^n$$

Esercizio 36. Sia $\mathbb{R}[X,Y]_d$ l' insieme dei polinomi a coefficienti reali, nelle indeterminate X, Y, di grado al più d.

- Verificare che $\mathbb{R}[X,Y]_d$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
- Provare che $\{1, X, Y, X^2, XY, Y^2\}$ è una base di $\mathbb{R}[X,Y]_2$. Si provi che, fissati comunque α, β in $\mathbb{R}$

  $$\{ (X-\alpha)^i (Y-\beta)^j \mid 0 \le i+j \le 2 \}$$

  è un' altra base di $\mathbb{R}[X,Y]_2$.
- Qual' è la dimensione di $\mathbb{R}[X,Y]_d$ per d arbitrario?

Esercizio 37. Siano V e W due K-spazi vettoriali. Provare che $V \times \{0\}$ e $\{0\} \times W$ sono sottospazi di $V \times W$, e che

$$V \times W = V \times \{0\} \oplus \{0\} \times W$$

in due modi diversi.

Esercizio 38. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita, e siano U e W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$.
Provare che se $\{u_1, u_2, \ldots, u_h\}$ è una base di U e $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ è una base di W, allora $\{u_1, \ldots, u_h, w_1, \ldots, w_k\}$ è una base di V.

Esercizio 39. Siano V e W due K-spazi vettoriali di dimensione finita, e siano $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di W. Provare che $\{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)\}$ è una base di $V \times W$.

Esercizio 40. Siano $W_1, \ldots, W_n$ sottospazi di V. Provare che V è somma diretta di $W_1, \ldots, W_n$ se e solo se ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, ove $w_i \in W_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Esercizio 41. Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1\,,\, v_2\,, \ldots, v_m \in V$. Provare che $v_1\,,\, v_2\,, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se i sottospazi $\langle\, v_1\,\rangle\,, \langle\, v_2\,\rangle\,, \ldots,\, \langle\, v_m\,\rangle$ di V sono in somma diretta, cioè se

$$\langle\, v_1\,\rangle + \langle\, v_2\,\rangle + \ldots + \langle\, v_m\,\rangle \;=\; \langle\, v_1\,\rangle \oplus \langle\, v_2\,\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\, v_m\,\rangle$$

Esercizio 42. Si consideri il campo $\mathbb{Z}_2 = \{\,0, 1\,\}$ e lo spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_2)^2$ su $\mathbb{Z}_2$.

- Trovare il numero di elementi di $(\mathbb{Z}_2)^2$.
- Qual è la dimensione di $(\mathbb{Z}_2)^2$?
- Siano v e w due vettori non nulli, qualsiasi di $(\mathbb{Z}_2)^2$. Provare che v e w sono linearmente indipendenti. (**NB** È un caso particolare !!! Molto, **MOLTO** particolare.)
- Trovare tutti i sottospazi di $(\mathbb{Z}_2)^2$.
- Sia $W = \langle\,(1, 0)\,\rangle$. Trovare tutti i sottospazi supplementari di W in $(\mathbb{Z}_2)^2$.

Esercizio 43. Siano V un spazio vettoriale di dimensione finita sul campo$K$, ed U un suo sottospazio. Provare che esiste un sottospazio W di V tale che $V = U \oplus W$. Trovare un esempio che mostri che W non è univocamente determinato da U.

Esercizio 44. Si provi che in uno spazio vettoriale V di dimensione finita due sottospazi U e W della stessa dimensione possiedono un sottospazio supplementare comune. Cioè esiste un sottospazio T di V tale che $U \oplus T = V = W \oplus T$.

Esercizio 45. Sia

$$U \;=\; \{\, A \in \mathscr{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,|\, a_{11} + a_{22} = 0\,\}$$

- Verificare che U è un sottospazio di $\mathscr{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ e darne una base.

- Determinare un sottospazio W di $\mathscr{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = \mathscr{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Esercizio 46. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, tale che non esista per V una base finita. Dimostrare direttamente, cioè senza usare il teorema di esistenza di una base, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono n vettori in V linearmente indipendenti.

Esercizio 47. Dimostrare che il K-spazio vettoriale $K[X]$ di tutti i polinomi con coefficienti nel campo K non è finitamente generato.

Esercizio 48. Dimostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}$ sul campo $\mathbb{Q}$ non è finitamente generato (usando il fatto che $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile, mentre $\mathbb{R}$ non lo è).

Esercizio 49. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione 10, e siano $U, W \subseteq V$ due suoi sottospazi di dimensione 8 e 9 rispettivamente. Discutere i possibili valori di $dim(U \cap W)$.

Esercizio 50. Usando l' algoritmo di Gauss, trovare una base del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (3, 3, 0, 6) \qquad v_2 = (1, 2, -2, 3) \qquad v_3 = (0, 1, 1, 2) \qquad v_4 = (2, 0, 1, 1)$$

Si trovi poi una base di U contenuta nel sistema di generatori dato.

Esercizio 51. Si verifichi che

$$U = \{ (x, y, z, t) \mid y + z - t = 0 \} \qquad \text{e}$$

$$W = \{ (x, y, z, t) \mid x - y = 0 \quad , \quad z - 2t = 0 \}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{Q}^4$. Si trovi poi la dimensione ed una base rispettivamente di U, W e $U \cap W$.

MATRICI

Esercizio 52. Una matrice di tipo $n \times n$, ad entrate in un campo qualsiasi è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j; è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.

- Verificare che ogni matrice simmetrica 3×3 ad entrate reali è combinazione lineare delle matrici

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

- L' insieme di tutte le matrici simmetriche di tipo 3×3 ad entrate reali è un sottospazio di $\mathscr{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$? Se si, trovane una base.
- Si può dire qualcosa di simile per le matrici antisimmetriche?
- Esiste qualche campo su cui gli insiemi delle matrici $n \times n$ simmetriche ed antisimmetriche coincidono?

Esercizio 53. Vedere se ciascuna delle seguenti matrici è invertibile e, in caso affermativo, trovare la sua matrice inversa

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&3&4\\-1&5&1\\3&-1&6\end{pmatrix}$$

Esercizio 54. Si calcoli la matrice inversa di

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Esercizio 55. Sia A una matrice $n \times n$ strettamente triangolare (superiore), cioè della forma

$$\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Si provi che $A^n = 0$.

Esercizio 56. Per ciascuna delle due matrici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 4 & -7 & -31 \\ -2 & 4 & 18 \\ 3 & -5 & -22 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

trovare due matrici invertibili P e Q tali che PAQ sia della forma (a blocchi)

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 57. Lo stesso dell' esercizio precedente per le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

In ciascuno dei due casi si esegua, poi, la verifica.

Esercizio 58. Date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

si determini, usando il solito algoritmo

a) una matrice X, di tipo 4×3, tale che $AX = E_3$;

b) una matrice Y, di tipo 3×4, tale che $YB = E_3$;

c) si diano delle condizioni per A (risp.: per B) in modo che esista una matrice X come in a) (risp.: una matrice Y come in b)).

Esercizio 59. È possibile trasformare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 8 & 11 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{nella} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(ove le entrate segnate con un asterisco non ci interessano, mentre λ è un numero il cui significato vedremo in seguito) utilizzando solamente trasformazioni elementari sulle righe di tipo III ?

Esercizio 60. Fissato un numero naturale $n \geq 3$, si calcoli il rango della matrice $n \times n$

$$A = (a_{ij}) \qquad \text{ove} \qquad a_{ij} = (i-1)n + j$$

Esercizio 61. Fissato un numero naturale $n \geq 2$, sia M lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ ad entrate in un fissato campo K . Se W_1 e W_2 sono i sottoinsiemi di M formati rispettivamente da tutte le matrici di rango $< n$ e ≤ 1 , si determini se W_1 e W_2 sono sottospazi di M .

SISTEMI LINEARI

Esercizio 62. Risolvere mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} & X_2 & +2X_3 & +3X_4 & = & 0 \\ X_1 & +2X_2 & +3X_3 & +4X_4 & = & 0 \\ 2X_1 & +3X_2 & +4X_3 & +5X_4 & = & 0 \\ 3X_1 & +4X_2 & +5X_3 & +6X_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6X_1 & +6X_2 & +2X_3 & -2X_4 & = & 2 \\ -9X_1 & +8X_2 & +3X_3 & -2X_4 & = & 3 \\ -3X_1 & +2X_2 & +X_3 & & = & 1 \\ -15X_1 & +14X_2 & +5X_3 & -4X_4 & = & 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 & +3X_2 & -X_3 & +4X_4 & = & 0 \\ 2X_1 & +5X_2 & -X_3 & +3X_4 & = & -1 \\ 4X_1 & -3X_2 & & +X_4 & = & 0 \\ -3X_1 & +X_2 & -5X_3 & -2X_4 & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 & +3X_2 & -4X_3 & +3X_4 & = & 9 \\ 3X_1 & +9X_2 & -2X_3 & -11X_4 & = & -3 \\ 4X_1 & +12X_2 & -6X_3 & -8X_4 & = & 6 \\ 2X_1 & +6X_2 & +2X_3 & -14X_4 & = & -12 \end{cases}$$

Esercizio 63. Si risolva mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & = & -1 \\ x & -2y & = & 1 \\ 5x & +2y & = & -3 \\ 7x & -2y & = & -1 \end{cases}$$

Esercizio 64. Si risolva mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 5x & +2y & +3z & = & -3 \\ 7x & -2y & +4z & = & -1 \end{cases}$$

Esercizio 65. Risolvere mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare, dato in forma matriciale

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Esercizio 66. Trovare mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} 2X_1 & -8X_2 & +X_3 & -X_4 & = & 11 \\ 5X_1 & -20X_2 & -4X_3 & -22X_4 & = & 21 \\ X_1 & -4X_2 & -6X_3 & -20X_4 & = & -1 \\ -3X_1 & +12X_2 & +5X_3 & +kX_4 & = & -10 \end{cases}$$

Per ciascuno di tali valori di k trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 67. Determinare mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss per quale valore di $k \in \mathbb{Q}$ il seguente sistema lineare è compatibile, e trovarne la soluzione generale

$$\begin{cases} 2X_1 & -8X_2 & +X_3 & +11X_4 & = & -1 \\ 5X_1 & -20X_2 & -4X_3 & +21X_4 & = & -22 \\ -3X_1 & +12X_2 & +5X_3 & -10X_4 & = & k \end{cases}$$

Esercizio 68. Trovare mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} 2x & +ky & = & 2 \\ kx & +2y & = & k \\ kx & +ky & = & k \end{cases}$$

Per ciascuno di tali valori di k trovare tutte le soluzioni. Fare lo stesso per il sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 3 \\ 3x & +y & +5z & = & 5 \\ x & & +2z & = & k \end{cases}$$

Esercizio 69. Trovare mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} x & +(k-1)y & +z & = & 1 \\ (2k-3)x & +y & +(k-1)z & = & 3-k \\ 2x & +ky & +kz & = & k \\ kx & +2y & +(2k-2)z & = & 4-k \end{cases}$$

Per ciascuno di tali valori di k trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 70. Determinare per quali valori del parametro razionale t il sistema lineare dato in forma matriciale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

è compatibile. Per ciascuno di tali valori di t trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 71. Si risolva il seguente sistema lineare col metodo di Cramer:

$$\begin{cases} 3x & +2y & +4z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & 1 \end{cases}$$

Esercizio 72. Studiare il seguente sistema lineare a coefficienti reali, in funzione del parametro λ:

$$\begin{cases} x & +2y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & +\lambda y & & & = & 0 \\ & y & +z & +2t & = & 0 \\ 3x & +2y & z & +t & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 73. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, in cui sia stata fissata una base $\mathscr{B}$. Sia W il sottospazio generato dai vettori di coordinate $(1,1,0,0)$ e $(1,0,-2,1)$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sottospazio U_k di V, definito dall' equazione $x_1 - x_2 + kx_3 = 0$. Determinare, al variare di k, una base di $U_k \cap W$ ed una per $U_k + W$.

Esercizio 74. Trovare, se esistono, i polinomi $p(X)$ di grado 3 a coefficienti reali, che prendono i valori $0, -4, 5, -15$ rispettivamente per $X = 1, -1, 2, -2$.

Esercizio 75. Discutere il seguente sistema lineare a coefficienti reali, nel parametro reale m

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m+2 \end{cases}$$

Esercizio 76. Si risolvano i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + y + 9z &= 1 \end{cases} \qquad 3x+2y+z-t = 2 \qquad \begin{cases} 3x + 4y - z - 3t &= 2 \\ x + y - z - 2t &= 0 \\ x - y + z + 4t &= 2 \\ x - y - z + t &= 2 \end{cases}$$

Esercizio 77. Si consideri un generico sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \end{cases}$$

e si supponga che il rango della matrice dei coefficienti sia 2. Si dimostri che le soluzioni di tale sistema sono tutte e solo le terne proporzionali a

$$\left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \;,\; \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \;,\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$

APPLICAZIONI LINEARI

Esercizio 78. Dire quali tra le seguenti applicazioni sono lineari (K è un campo e con $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ si è indicato, al solito, l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 , compreso il polinomio nullo):

i) $f : K \to K$ data da $f(a) = a^n$ per ogni $a \in K$, ove $n \geq 1$ è un intero prefissato.

ii) $g : K^2 \to K^3$ data da $(x, y) \mapsto (x + y, y - x, 3x)$.

iii) $h : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ data da $a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 \mapsto a_3X^3 + a_2$.

iv) $k : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ data da

$$k : a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 \mapsto X^3 + a_0X^2 + a_1X + a_2$$

Esercizio 79. Esiste un endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(2, 0, 1) = (0, 1, 1) \qquad F(1, 1, 1) = (5, 2, 1) \qquad F(0, -2, -1) = (0, 1, 2) \ ?$$

Esercizio 80. Dati gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$, verificare che le relazioni

$$F(1, 0, 1) = (1, 1) \qquad F(0, 0, 1) = (1, 0) \qquad F(1, 1, 0) = (0, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Determinare una base di $Im(F)$ e una di $Ker(F)$. Stabilire se F è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

Esercizio 81. Se A è una matrice arbitraria, ricordiamo che la sua *trasposta* è la matrice ${}^tA$ le cui righe sono ordinatamente le colonne di A. Se K è un campo in cui $2 \neq 0$ (cioè se la caratteristica di K è diversa da 2), consideriamo i sottospazi $\mathscr{S}$ e $\mathscr{A}$ di $\mathscr{M}(n \times n, K)$ formati rispettivamente dalle matrici simmetriche ed antisimmetriche.

- Si verifichi che l'applicazione

$$\sigma : \mathscr{M}(n \times n, K) \to \mathscr{M}(n \times n, K) \qquad \text{data da} \qquad A \mapsto \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$

è K-lineare, e la sua immagine è $\mathscr{S}$.

- Si trovi $Ker(\sigma)$.
- Si trovi una base sia per il nucleo che per l'immagine di σ nel caso in cui $n = 3$.
- Esiste un'analoga applicazione lineare $\mathscr{M}(n \times n, K) \to \mathscr{M}(n \times n, K)$ che abbia per immagine $\mathscr{A}$?
- Si verifichi che

$$\mathscr{M}(n \times n, K) \;=\; \mathscr{S} \oplus \mathscr{A}$$

  cioè che ogni matrice $n \times n$ si può scrivere come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica, e questo in un unico modo.

Esercizio 82. Siano V e W due K-spazi vettoriali, e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che se $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k) \in W$ sono linearmente indipendenti, allora anche $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V. Vale il viceversa?

Esercizio 83. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra i K-spazi vettoriali V e W, e sia $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base di V. Dimostrare che F è suriettiva se e solo se $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$ generano W. Provare, inoltre, che F è iniettiva se e solo se $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 84. Sia V uno spazio vettoriale e sia $p : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $p \circ p = p$ (una tale p si chiama "proiettore"). Si provi che V è somma diretta di $Im(p)$ e $Ker(p)$ (sugg.: si scriva ogni $v \in V$ nella forma $v - p(v) + p(v)$.)

Esercizio 85. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di un K-spazio vettoriale V. Un sottospazio W di V si dice *invariante* per f se $f(W) \subseteq W$. È chiaro che, se $f = c \cdot 1_V$ per un $c \in K$ opportuno (si dice, allora, che f è un'*omotetia*, e c è detto *rapporto dell'omotetia*) ogni sottospazio di V è invariante per f. Si provi che vale il viceversa.

Esercizio 86. Dato uno spazio vettoriale V, sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V, diverso dall'applicazione identica, tale che $f^2 = f \circ f = 1_V$ (un tale f è detto *involuzione*).

i) Dimostrare che f è un automorfismo, e che $f = f^{-1}$.

ii) Dimostrare che l' unica omotetia che sia un' involuzione è quella di rapporto -1.

iii) Dare esempi espliciti di involuzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che non siano omotetie.

Esercizio 87. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che l' applicazione $f : U \times W \to V$ definita da $f(u, w) := u - w$ per ogni $(u, w) \in U \times W$, è lineare e che $Im(f) = U + W$ e $Ker(f) \simeq U \cap W$. Utilizzando f si calcoli $dim(U \times W)$.

Esercizio 88. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $W \subset V$ un suo sottospazio ed $f : W \to U$ un' applicazione lineare. Dimostrare che f si può estendere ad un' applicazione lineare da V in U.

Esercizio 89. Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali di dimensione finita. Si costruisca $g : W \to V$ lineare tale che $g \circ f$ sia l' identità di V.

Esercizio 90. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n, m e sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare suriettiva. Si dimostri che esistono basi $\mathscr{B}$ di V e $\mathscr{C}$ di W tali che la matrice associata ad f rispetto a tali basi è $(E_m \,|\, 0)$. Esiste una proprietà analoga per le applicazioni lineari iniettive?

Esercizio 91. Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Si provi che f è iniettiva (risp.: suriettiva) se e solo se esiste un' applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = 1_V$ (risp. $f \circ g = 1_W$).

Esercizio 92. Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e di rango ≤ 1. Si dimostri che $A = BC$ (prodotto righe per colonne), ove le matrici B e C sono rispettivamente di tipo $m \times 1$ e $1 \times n$.

Esercizio 93. Sia $u : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

i) Si verifichi che $u \circ u = 0$ se e solo se $Im(u) \subseteq Ker(u)$.

ii) Supposto che $u \circ u = 0$, si provi che $1_V + u$ è un automorfismo di V.

iii) Sempre nell'ipotesi che $u \circ u = 0$, si verifichi che $rg(u) \leq \frac{1}{2}\, dim(V)$.

Esercizio 94. Dimostrare che un sistema lineare omogeneo con un numero di incognite maggiore del numero delle equazioni ha sempre soluzioni non nulle.

Esercizio 95. Siano V e W due K-spazi vettoriali di dimensione finita, $f : V \to W$ un'applicazione lineare e $U \subseteq W$ un sottospazio di W. Si provi che

$$dim(\, f^{-1}(U)\,) \; = \; dim(\, U \cap Im(f)\,) + dim(\, Ker(f)\,)$$

Esercizio 96. Siano U, V e W tre spazi vettoriali sopra lo stesso campo K , e siano $f : U \to V$ e $g : V \to W$ due applicazioni lineari tali che $g \circ f = 0$. Si provi che se f è suriettiva allora si ha $g = 0$, mentre se g è iniettiva si ha $f = 0$.

Esercizio 97. Siano U, V, W tre K-spazi vettoriali di dimensione finita, e siano $f : U \to V$ un'applicazione lineare iniettiva e $g : V \to W$ lineare suriettiva tali che $Im(f) = Ker(g)$. Si provi che

$$dim(U) + dim(W) \; = \; dim(V)$$

Esercizio 98.

a) Si descriva il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo, determinandone in particolare una base:

$$\begin{cases} 2x + 2z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \\ y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

b) Esistono applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $Ker(f) = W$, e $Im(f)$ è lo spazio delle soluzioni dell' equazione $x - y + 2z = 0$? In caso affermativo costruirne esplicitamente una.

Esercizio 99. Determinare un' applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ verificante le seguenti proprietà

$$Ker(F) = \langle\, (1,1,0), (1,0,-1) \,\rangle \qquad Im(F) = \langle\, (1,0) \,\rangle$$

Esercizio 100. Sono dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,1,1) & v_2 = (1,-1,0) & v_3 = (0,1,1) \\ w_1 = (0,1,2) & w_2 = (1,2,2) & w_3 = (1,3,4) \end{array}$$

Provare che esiste un unico endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(v_i) = w_i \qquad \text{per ogni } \ i = 1,2,3$$

Calcolare $F(2,-1,3)$. L' endomorfismo F è iniettivo ? È suriettivo ?

Esercizio 101. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l' applicazione lineare data da

$$f(x,y,z) = (y\,,\, -5x)$$

Trovare la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$. Fare lo stesso per l' applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$g(x,y,z) = (2x - 3y + 4z\,,\, x + y + z)$$

Trovare la matrice B di g rispetto alla base $\{\, (1,1,0)\,,\, (1,0,1)\,,\, (0,1,1) \,\}$ di $\mathbb{R}^3$, e canonica di $\mathbb{R}^2$. L' applicazione g è suriettiva ? È inettiva ?

Esercizio 102. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito da

$$F(x,y,z) = (3x - 2y\,,\, -x + 3y - z\,,\, -5x + 7y - z)$$

Trovare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Se $v = (0,0,1)$, provare che $\mathscr{B} := \{\, v, F(v), F^2(v) \,\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, ove $F^2 = F \circ F$.
Scrivere la matrice di F rispetto a $\mathscr{B}$. Scrivere la matrice di F rispetto alla base canonica nel dominio e $\mathscr{B}$ nel codominio. Scrivere la matrice di F rispetto $\mathscr{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.
Dare una base per $Im(F)$ ed una per $Ker(F)$.

Esercizio 103. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$F(x, y, z) = (-y + z\,,\ x - z\,,\ -x + z)$$

Determinare una base per $Im(F)$ ed una per $Ker(F)$.
Scrivere la matrice di F nella base $\{\,(1,1,1)\,,\,(1,-1,0)\,,\,(1,0,1)\,\}$ di $\mathbb{R}^3$.
Provare che $\mathbb{R}^3 = Ker(F) \oplus Im(F)$.

Esercizio 104. Siano $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$. Determinare un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che F è suriettiva, ed inoltre $F(v_1) = F(v_2)$. Determinare, inoltre, un'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(G)$ sia il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da v_1 e v_2.

Esercizio 105. Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$F(1,2,3) = (1,0) \qquad F(3,2,1) = (0,-1) \qquad F(1,1,1) = (\lambda, \lambda)$$

Esercizio 106. Siano $v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Determinare un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ suriettiva e tale che $F(v_1) = F(v_2)$. Esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che gode delle stesse proprietà? Determinare, infine, un'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(G) = \langle\, v_1, v_2\, \rangle$.

Esercizio 107. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che $f^3 = 0$.

Esercizio 108. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$? Se si, costruire esplicitamente g.

Esercizio 109. Siano U_1 e U_2 due sottospazi di un K-spazio vettoriale V di dimensione finita. Si supponga che U_1 e U_2 siano in somma diretta, cioè che si abbia $U_1 \cap U_2 = 0$. Sia inoltre W un altro K-spazio vettoriale, e siano $f_1 : U_1 \to W$ e $f_2 : U_2 \to W$ due applicazioni lineari. Dimostrare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : U_1 \oplus U_2 \to W$ le cui restrizioni ad U_1 e ad U_2 siano rispettivamente f_1 e f_2. Supponendo che $U_1 \oplus U_2 \subsetneq V$, esistono applicazioni lineari $V \to W$ le cui restrizioni ad U_1 e ad U_2 siano rispettivamente f_1 e f_2? Quante?

Esercizio 110. Sia $f : V \to W$ un' applicazione tra spazi vettoriali, e sia

$$\Gamma_f := \{ (v, f(v)) \in V \times W \mid v \in V \}$$

il suo grafico. Si provi che f è lineare se e solo se Γ_f è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.

Esercizio 111. Siano V e W spazi vettoriali, ed $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Si verifichi che

$$F : V \times W \to V \times W \qquad \text{data da} \qquad F : (v, w) \mapsto (v, w + f(v))$$

è un automorfismo.

Esercizio 112. Determinare una base di $Im(L)$ e una di $Ker(L)$ ove L è l' applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & 1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Lo stesso per l' applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & -52 & -4 & 22 \\ 3 & 52 & 5 & -21 \end{pmatrix}$$

Esercizio 113.

a) Costruire, se possibile, un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$Ker(f) \,=\, \langle\,(1,2,1)\,\rangle \qquad \text{e} \qquad Im(f) \,=\, f(\mathbb{R}^3) \,=\, \langle\,(1,0,0,0),(0,0,1,1)\,\rangle$$

b) Come sopra con

$$Ker(f) \,=\, \langle\,(0,1,0),(0,1,1)\,\rangle \qquad \text{e} \qquad Im(f) \,=\, \langle\,(1,2,0,1),(2,4,0,3)\,\rangle$$

Esercizio 114. Siano dati uno spazio vettoriale di dimensione finita V, un suo sottospazio proprio W, ed un endomorfismo $L : V \to V$ tale che $L(W) \subseteq W$. Far vedere che L può essere rappresentato da una matrice a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Qual' è il significato della matrice A ?

Esercizio 115. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K . Dimostrare che si ha $Hom_K(K,V) \simeq V$ come spazi vettoriali costruendo esplicitamente un isomorfismo.

Esercizio 116. Si dimostri che è sufficiente assegnare

$$f(X^n) \,:=\, nX^{n-1} \qquad \text{se } \; n \geq 1 \qquad\qquad f(1) \,:=\, 0$$

per definire un endomorfismo $f : \mathbb{R}\,[X] \to \mathbb{R}\,[X]$. L' applicazione lineare f è suriettiva ? Che cosa si può dire del suo nucleo ? Qual' è il significato di f ?

Esercizio 117. Sia $F : \mathbb{R}\,[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare definita da

$$f(1) \,:=\, (1,1,-1) \qquad\qquad f(x) \,:=\, (1,-1,2) \qquad\qquad f(x^2) \,:=\, (1,0,1)$$

Provare che F è un isomorfismo. Scrivere la matrice di F rispetto alle basi $\mathscr{A} = (\,1\,,\, 1{+}x\,,\, 1{+}x{+}x^2\,)$ di $\mathbb{R}\,[x]_{\leq 2}$, e $\mathscr{B} = (\,(0,1,-1)\,,\,(1,1,0)\,,\,(1,2,2)\,)$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 118. In $\mathbb{R}^2$ si considerino le seguenti basi: la base canonica $\mathscr{A}$, $\mathscr{B} = \{(1,2),(-1,3)\}$, $\mathscr{C} = \{(1,-2),(0,3)\}$. Trovare le matrici di trasformazione delle coordinate

$$M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(id) \qquad M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(id) \qquad M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(id)$$

Trovare inoltre le coordinate di $(3,5) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$.

Esercizio 119. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$v_1 = (1,0,0) \qquad v_2 = (0,-1,0) \qquad v_3 = (0,0,-1)$$

Si verifichi che $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $F(x,y,z) = (-z, y, 2x+z)$. Calcolare $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(F)$, dove $\mathscr{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 120. Si verifichi che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (-1,0,1) \qquad v_2 = (-1,1,0) \qquad v_3 = (2,0,0)$$

ne costituiscono una base, che indicheremo con $\mathscr{B}$. Indicata con $\mathscr{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(F)$. Verificare che F è un isomorfismo, e scrivere la matrice $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(F^{-1})$.

Esercizio 121. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita, rispetto alla base canonica $\mathscr{A}$ di $\mathbb{R}^3$, dalla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia inoltre $\mathscr{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ data da $\{v_1 = (1,1,-1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)\}$. Determinare le seguenti matrici

$$M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(id) \qquad M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(id) \qquad M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) \qquad M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(f) \qquad M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(f)$$

Determinare poi $Ker(f)$ e $Im(f)$ mediante basi. Infine si trovino $f^{-1}(0,1,2)$ e $f^{-1}(1,5,2)$.

Esercizio 122. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare

$$F(x,y) \,=\, (\,2x+y\,,\, -x+2y\,)$$

Se $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ indicano le stesse basi di $\mathbb{R}^2$ che nell'esercizio precedente, si trovino le seguenti matrici associate ad F

$$M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}}(F) \qquad M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}(F) \qquad M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}}(F) \qquad M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(F) \qquad M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(F)$$

Esercizio 123. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -7 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$, ed una base $\mathscr{C}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alle quali si abbia (forma a blocchi)

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(L) \,=\, \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tali basi sono uniche? Si faccia lo stesso per l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 124. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Far vedere che per ogni $v \in V$ is ha $f^{-1}(f(v)) \,=\, v + Ker(f)$.

Esercizio 125. Sia $K\,[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate, a coefficienti nel campo K. Sia, inoltre, $F \in K\,[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ un polinomio *omogeneo* di grado m. Si provi che se la caratteristica di K è nulla (oppure non divide m), allora vale la *formula di Eulero*

$$mF \;=\; X_1\frac{\partial F}{\partial X_1} + X_2\frac{\partial F}{\partial X_1} + \ldots + X_n\frac{\partial F}{\partial X_n}$$

ove le "derivate parziali" a secondo membro sono i polinomi che si ottengono derivando formalmente F rispettivamente rispetto alle varie indeterminate.

Esercizio 126. Scrivere equazioni cartesiane per l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1,2,0,0)$, $(3,0,-1,-1)$, $(0,1,1,1)$.

Esercizio 127. Siano U e W sottospazi di un fissato spazio vettoriale V. Sia $f : U \to U+W/W$ l'applicazione lineare ottenuta componendo l'inclusione $U \subseteq U+W$ con l'epimorfismo canonico $U+W \to U+W/W$. Si provi che f è suriettiva e se ne trovi il nucleo.

Esercizio 128. Siano U e W sottospazi di un fissato spazio vettoriale V, tali che $U \subseteq W$. Dimostrare che

$$V/W \;\simeq\; \frac{V/U}{W/U}$$

costruendo esplicitamente un isomorfismo.

Esercizio 129. Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione finita n, e sia $\{\, v_1, v_2, \ldots, v_n \,\}$ una sua base fissata. Fissato comunque i con $1 \leq i \leq n$, si consideri l'applicazione lineare

$$v_i^* : V \to K \qquad \text{definita da} \qquad v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

ove si è indicata con δ_{ij} la cosiddetta "delta di Kronecker", data da

$$\delta_{ij} \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ \\ 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

Si provi che gli elementi v_i^* dello spazio vettoriale $V^* := Hom_K(V,K)$ così definiti ne costituiscono una base. Tale base viene comunemente detta la base *duale* di $\{\, v_1, v_2, \ldots, v_n \,\}$. Lo spazio vettoriale $V^* = Hom_K(V,K)$ viene detto spazio *duale* di V.

Supponiamo, invece, che V abbia dimensione *infinita*. Se $\{ v_i \mid i \in I \}$ è una sua base fissata, si possono ancora definire nello stesso modo utilizzato sopra degli elementi $v_i^* \in Hom_K(V, K)$ per ogni $i \in I$. Si provi che tali elementi sono linearmente indipendenti, ma che non formano un sistema di generatori per $Hom_K(V, K)$.

Esercizio 130. Dato uno spazio vettoriale V su K di dimensione finita, ed una sua base $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$, sia $\{ v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^* \}$ la sua base duale. Si dimostri che l'isomorfismo $f : V \to V^*$ costruito mediante il teorema di determinazione di un'applicazione lineare ponendo

$$f(v_i) := v_i^* \qquad \text{per ogni} \qquad i = 1, \dots, n$$

non è canonico, dipende, cioè, dalla scelta fatta della base $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ (sugg.: si costruisca un esempio concreto).

Esercizio 131. Ad ogni applicazione lineare $f : V \to W$ si associ la mappa

$$f^* : W^* = Hom_K(W, K) \to Hom_K(V, K) = V^* \qquad \text{data da} \qquad f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

Si verifichi che f^* è K-lineare. Si verifichi, inoltre, che f è iniettiva (risp.: suriettiva) se e solo se f^* è suriettiva (risp.: iniettiva). Se $g : W \to T$ è un'altra applicazione lineare, chi è $(g \circ f)^*$?

Esercizio 132. Dato un campo K, si consideri lo spazio vettoriale $V = K^2$ su K. Sia $\{ v_1, v_2 \}$ una base di V. Allora anche $\{ v_1 + v_2, v_2 \}$ è una base di V. Costruite le rispettive basi duali $\{ v_1^*, v_2^* \}$ e $\{ (v_1 + v_2)^*, v_2^* \}$ dello spazio duale V^*, si definiscano gli isomorfismi $f : V \to V^*$ e $g : V \to V^*$ come segue

$$f(av_1 + bv_2) = av_1^* + bv_2^*$$
$$g\big(c(v_1 + v_2) + dv_2\big) = c(v_1 + v_2)^* + dv_2^*$$

per ogni $(a, b) \in K^2$, ed ogni $(c, d) \in K^2$. Si verifichi che $f \neq g$.

Esercizio 133. Con le stesse ipotesi e notazioni dell'esercizio precedente, si supponga, inoltre, che V e W abbiano dimensione finita m ed n rispettivamente. Fissate una base $\mathscr{B} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ per V, ed una base $\mathscr{C} = \{ w_1, \ldots, w_n \}$ per W, sia $A = (a_{ij})$ la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$. Si verifichi che la matrice che rappresenta $f^* : W^* \to V^*$ rispetto alle basi duali $\{ w_1^*, \ldots, w_n^* \}$ di W^* e $\{ v_1^*, \ldots, v_m^* \}$ di V è la matrice ${}^tA$, trasposta di A.

Esercizio 134. Fissata un'applicazione lineare $f : V \to W$, si consideri l'applicazione $f^* : W^* \to V^*$ da essa indotta tra gli spazi duali. Si mostri come sia possibile costruire canonicamente una nuova applicazione lineare $g : Im(f^*) \to (V/Ker(f))^*$, e come g risulti essere un isomorfismo. Come corollario si provi che per ogni matrice il rango per righe coincide col rango per colonne (sugg.: si sfrutti l'esercizio precedente).

Esercizio 135. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, e sia V^* il K-vettoriale $Hom_K(V, K)$. Fissato arbitrariamente $v \in V$, si consideri

$$\varphi_v : V^* \to K \qquad \text{data da} \qquad \varphi_v(f) := f(v) \quad \text{per ogni} \quad f \in V^*$$

Dopo aver capito come funziona φ_v si provi che:

a) L'applicazione φ_v è K-lineare, cioè $\varphi_v \in (V^*)^* =: V^{**}$.

b) $\varphi : V \to V^{**}$ data da $\varphi(v) := \varphi_v$ per ogni $v \in V$, è K-lineare

c) φ è iniettiva.

d) Se $dim(V) < \infty$, allora φ è un *isomorfismo*.

e) Per ogni $f : V \to W$ lineare, si provi che esiste un'applicazione lineare canonica[1] $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$, tale che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

dove le applicazioni verticali sono quelle canoniche definite in b).

[1]In matematica si chiama "canonico" ogni oggetto nella definizione del quale, detto alla buona, non compaiono scelte arbitrarie. Tutte le mappe costruite in questo esercizio sono tali.

Esercizio 136. Sia $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ l' applicazione lineare avente come matrice associata ristetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino $Ker(f)$ e $Im(f)$ sia mediante basi che mediante equazioni cartesiane.

Esercizio 137. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$W \;=\; \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_4 = x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \,\}$$

Dare una base di $\mathbb{R}^4/W$.

Esercizio 138. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, e sia V^* lo spazio duale di V. Se $\varphi \in V^*$ è non nullo, qual' è la dimensione di $Ker(\varphi)$? Se φ e ψ sono due elementi linearmente indipendenti di V^*, provare che

$$dim(\, Ker(\varphi) \cap Ker(\psi) \,) \;=\; n - 2$$

DETERMINANTI

Esercizio 139. Decomporre

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 2 & 7 & 1 & 6 & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

in prodotto di cicli disgiunti. Decomporlo anche in prodotto di trasposizioni e determinarne il segno. Calcolare σ^{-1}.

Esercizio 140. Trovare il segno di ciascuna delle seguenti permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha \in \mathcal{S}_n$ è una permutazione di segno -1, qual'è il segno di α^{-1}?

Esercizio 141. Ricordiamo che due elementi a, b di un gruppo G (in notazione moltiplicativa) si dicono *coniugati* se esiste $c \in G$ tale che $a = cbc^{-1}$. Si dimostrino le seguenti proprietà

- due elementi coniugati hanno lo stesso ordine (come elementi di un gruppo);
- due elementi coniugati di $\mathcal{S}_n$ hanno lo stesso segno;
- due qualsiasi cicli di $\mathcal{S}_n$ aventi la stessa lunghezza sono coniugati;
- il segno di una trasposizione è -1;
- se $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k$ è un prodotto di cicli disgiunti di lunghezza rispettivamente $\ell_1, \ell_2, \dots \ell_k$, allora l'ordine di σ è il minimo comune multiplo degli ℓ_i;
- dato il ciclo $(a_1\, a_2 \dots a_r)$ di $\mathcal{S}_n$ si scriva il suo inverso.

Esercizio 142. Si scrivano tutti gli elementi di $\mathcal{S}_4$ come prodotto di cicli disgiunti. Si ripartiscano, poi, tutti gli elementi di $\mathcal{S}_4$ in classi di coniugio e per ciascuna classe si trovi l'ordine dei suoi elementi.

Esercizio 143. Si verifichi che i cicli

$$(1,2) \qquad (2,3) \qquad (3,4)$$

generano $\mathcal{S}_4$, mentre sopprimendo anche uno solo di tali elementi non si ha più un sistema di generatori.

Esercizio 144. Si verifichi che i cicli

$$(1,2) \quad \text{e} \quad (1,2,3)$$

generano $\mathcal{S}_3$, mentre

$$(1,2) \quad \text{e} \quad (1,2,3,4)$$

generano $\mathcal{S}_4$. Qual' è il segno di $(1,2,3)$? E quello di $(1,2,3,4)$?

Esercizio 145. Dimostrare che i gruppi $\mathscr{S}_n$ per $n \geq 3$, e $\mathcal{A}_n$ per $n \geq 4$ non sono abeliani. Scrivere tutti gli elementi di $\mathcal{S}_3$, $\mathscr{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$ come prodotto di cicli disgiunti.

Esercizio 146. Si verifichi direttamente col calcolo che il numero λ trovato risolvendo l' Esercizio 59 coincide con $det(A)$. Si trovi poi una giustificazione teorica di ciò.

Esercizio 147. Calcolare il determinante delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & o \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 148. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

usando :

b) la definizione di determinante, dopo averla esposta;

b) la regola di Sarrus;

c) sviluppo secondo la prima colonna;

d) operazioni elementari sulle righe.

Esercizio 149. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

usando:

a) operazioni elementari sulle righe;

b) sviluppo secondo la prima colonna;

c) sviluppo secondo la terza riga.

Esercizio 150. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 151. Calcolare i determinanti delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Esercizio 152. Calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\sin\alpha & b\cos\alpha & ab \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & a^2\sin\alpha & b^2\cos\alpha & a^2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{vmatrix}$$

Esercizio 153. Calcolare la matrice inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

usando :

a) operazioni elementari sulle righe;

b) la formula tramite i determinanti.

Esercizio 154. Si verifichi che per ogni $n \geq 3$ vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Esercizio 155. Dimostrare che (tutte le entrate non specificate nella seguente matrice sono nulle)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & & & & & \\ -1 & 1 & 2^2 & & & & \\ & -1 & 1 & 3^2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ & & & & & -1 & 1 \end{vmatrix} = n!$$

(sugg. : per induzione su n , sviluppando secondo gli elementi dell' ultima colonna.)

Esercizio 156. Sia A una matrice di tipo $n \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$, antisimmetrica, cioè tale che ${}^tA = -A$. Si provi che $det(A) = 0$ se n è dispari.

Esercizio 157. Si scomponga in fattori i determinanti di ciascuna delle seguenti matrici antisimmetriche

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & e \\ -a & 0 & f & g & h & i \\ -b & -f & 0 & l & m & n \\ -c & -g & -l & 0 & p & q \\ -d & -h & -m & -p & 0 & r \\ -e & -i & -n & -q & -r & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 158. Si scomponga in fattori i determinanti (detti "determinanti di Vandermonde") di ciascuna delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 159. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Dimostrare che per $K = \mathbb{R}$ un' applicazione multilineare $V^n \to K$ è alternante se e solo se è antisimmetrica. Dimostrare che per $K = \mathbb{Z}_2$ (l' unico campo costituito da due elementi) la stessa cosa non è vera. Dimostrare, infine, che se $m > dim(V)$, allora un' applicazione multilineare alternante $V^m \to K$ è identicamente nulla.

Esercizio 160. Sia $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ l' applicazione lineare definita da

$$F(e_1) = (1,1,1) \qquad F(e_2) = (1,0,-1) \qquad F(e_3) = (1,-1,\lambda)$$

ove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{Q}^3$, e $\lambda \in \mathbb{Q}$ è un parametro. Determinare per quali valori di λ l' applicazione F è un automorfismo.

Esercizio 161. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$ ad entrate in un campo K, tale che $a_{ij} = 0$ se $i + j \leq n$. Provare che

$$det(A) = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n} \dots a_{n1}$$

Esercizio 162. Sia V uno spazio vettoriale reale (cioè sul campo $\mathbb{R}$) di dimensione finita, e sia $J : V \to V$ un endomorfismo tale che $J^2 = J \circ J = -1_V$. Si provi che $dim(V)$ è pari (sugg.: si consideri un opportuno determinante). Chi sono il nucleo e l'immagine di J? Si verifichi poi che, se $\lambda = a + ib$ è un numero complesso arbitrario ($a, b \in \mathbb{R}$), allora

$$\lambda v = (a + ib)v := av + bJ(v)$$

definisce su V un prodotto per numeri complessi che rende V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Esercizio 163. Siano A, B due matrici $n \times n$, ad entrate reali, e si consideri la matrice a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Si provi che $det(M) \geq 0$ (sugg.: si consideri M ad entrate complesse, e si giochi con le operazioni elementari).

Esercizio 164. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[X]_n$ e sia $f : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$ l'endomorfismo definito da

$$f(p) := p + p' \qquad \text{per ogni } p \in \mathbb{R}[X]_n$$

Si calcoli $det(f)$.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Esercizio 165. Trovare gli autovalori ed una base per ogni autospazio dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) \;=\; (\, 2x + y, y - z, 2y + 4z \,)$$

Esercizio 166. Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori per l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$f(x, y, z) \;=\; (\, x - 2z, 0, -2x + 4z \,)$$

Dire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base diagonalizzante.

Esercizio 167. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di un K-spazio vettoriale V tale che ogni vettore (non nullo) di V è autovettore per f. Si provi che allora f è un'omotetia, cioè che $f = c \cdot 1_V$ per un $c \in K$ opportuno.

Esercizio 168. Sia λ un autovalore per l'endomorfismo $f : V \to V$ dello spazio vettoriale V. Se f è invertibile si provi che necessariamente si ha $\lambda \neq 0$, e che λ^{-1} è autovalore per f^{-1}.

Esercizio 169. Verificare se gli endomorfismi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiti (rispetto alla base canonica) rispettivamente dalle matrici

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

Esercizio 170. Vedere se la matrice

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile a seconda che la si consideri sul campo $\mathbb{R}$, o su $\mathbb{C}$. In caso affermativo trovare una matrice S (reale o complessa) tale che SAS^{-1} sia diagonale.

Esercizio 171. Sia A una matrice di tipo $n \times n$ ad entrate in un campo K. Provare che A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori. Dare un esempio in cui A e ${}^tA$ hanno differenti autovettori.

Esercizio 172. Sia A una matrice di tipo $n \times n$ tale che il suo polinomio caratteristico $p_A = (t - \lambda)^n$ ed inoltre $m_g(\lambda) = n$. Si dimostri che A è diagonale.

Esercizio 173. Decidere se l'endomorfismo f di $\mathbb{Q}^3$ definito dalle condizioni

$$f(1,1,0) = (3,3,0) \qquad f(0,1,1) = (1,3,5) \qquad f(1,0,2) = (9,0,8)$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una base di $\mathbb{Q}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale. In ogni caso determinare autovalori e autospazi.

Esercizio 174. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Si dimostri che f è nilpotente (cioè esiste un numero naturale positivo m tale che $f^m = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$, l'endomorfismo nullo di V) se e solo se l'unico autovalore di f è lo zero.

Esercizio 175. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 ad entrate reali. Sia $F : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$F(A) := A - {}^tA \qquad \text{per ogni} \quad A \in V$$

Trovare gli autovalori e gli autospazi di F. Stabilire se F è diagonalizzabile, e in caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di F.

Esercizio 176. Sia V lo spazio vettoriale reale costituito dai polinomi $p \in \mathbb{R}[X]$ di grado ≤ 2 e dallo zero. Sia $F : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$F(p) := \frac{d^2p}{dX^2} - p \qquad \text{per ogni} \quad p \in V$$

Calcolare la matrice di F rispetto alla base $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ di V. Determinare $Ker(F)$ ed $Im(F)$ e le loro dimensioni. F è diagonalizzabile?

Esercizio 177. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2, e sia A una matrice di tipo 2×2 su K tale che $A^2 = I_2$. Si dimostri che A è diagonalizzabile.

Esercizio 178. Date due matrici quadrate A, B di ordine n, su un campo qualunque, si dimostri che AB e BA hanno gli stessi autovalori.

Esercizio 179. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K. Siano f e g due endomorfismi di V tali che $f \circ g = g \circ f$.

a) Si verifichi che la restrizione di f al sottospazio $g(V)$ è un endomorfismo di $g(V)$, e analogamente per la restrizione di f a $Ker(g)$.

b) Se λ è un autovalore di g, e se V_λ è il relativo autospazio, si verifichi che la restrizione di f al sottospazio V_λ è un endomorfismo di V_λ.

c) Dedurre da b) che se K è algebricamente chiuso, allora f e g hanno un autovettore in comune (non necessariamente relativo allo stesso autovalore).

Esercizio 180. Dare un esempio di una matrice 3×3 su $\mathbb{C}$ che non è diagonalizzabile ed un esempio di una matrice 3×3 su $\mathbb{R}$ che non è triangolarizzabile.

Esercizio 181. Sia A una matrice 2×2 su $\mathbb{R}$ tale che $det(A) < 0$. Si dimostri che A è diagonalizzabile. La condizione "$det(A) < 0$" è anche necessaria affinché A sia diagonalizzabile?

Esercizio 182. Sia A di ordine $n \times n$ su $\mathbb{R}$ tale che per un opportuno intero $m > 0$ si abbia $A^m = E_n$. Si dimostri che gli unici autovalori possibili per A sono $+1$ e -1. È vero che A ha sempre un autovalore? Che cosa si può dire degli autovalori di A (esistenza e valori) nel caso in cui $A^m = 0$?

Esercizio 183. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione infinita sul campo K, e sia $F : V \to V$ un endomorfismo. Si dimostri che in generale non esiste un polinomio $f \in K[x]$ tale che ogni autovalore di F sia radice di f.

Esercizio 184. Sia A una matrice quadrata su $\mathbb{C}$ avente solo lo zero come autovalore. Provare che esiste un intero $m > 0$ per il quale si ha $A^m = 0$ (una tale matrice si dice *nilpotente*). È vera l'analoga proprietà per una matrice quadrata su $\mathbb{R}$?

Esercizio 185. Sia F un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, non diagonalizzabile ed avente 2 e -3 come autovalori. Calcolare la matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo.

Esercizio 186. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, e sia F un endomorfismo di V, avente n autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a due a due distinti. Si provi che

$$G := (F - \lambda_1 id_V) \circ (F - \lambda_2 id_V) \circ \ldots \circ (F - \lambda_n id_V)$$

è l'endomorfismo nullo di V. Si provi inoltre che, se H è un endomorfismo di V tale che $F \circ H = H \circ F$, allora ogni autovettore di F è un autovettore di H. Dedurne che esiste una base di V i cui elementi sono autovettori contemporaneamente di F e di H.

Esercizio 187. Provare che una matrice quadrata di ordine n, avente rango 1, è diagonalizzabile se e solo se ha un autovalore diverso da zero.

Esercizio 188. È invertibile una matrice A di tipo 3×3, ad entrate reali, avente polinomio caratteristico $p_A = -(x-2)(x-5)^2$? È simile ad una matrice diagonale?

FORME BILINEARI E MULTILINEARI

Esercizio 189. Si provi che in uno spazio vettoriale euclideo V due vettori u e v hanno la stessa norma se e solo se $u+v$ è ortogonale a $u-v$. Si provi, inoltre, che u e v sono ortogonali se e solo se $u+v$ e $u-v$ hanno la stessa norma.

Esercizio 190. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, e sia $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una base ortonormale di V. Provare che se v è un vettore tale che $\langle v, v_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora $v = 0$. Che cosa si può dire nel caso in cui $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sia una base qualsiasi?

Esercizio 191. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, e siano U a W due suoi sottospazi. Dimostrare:

a) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

b) $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

Esercizio 192. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, e sia W un suo sottospazio. Dimostrare che $dim(W) + dim(W^{\perp}) = dim(V)$, e che $W \oplus W^{\perp} = V$.

Esercizio 193. Su uno spazio vettoriale reale V di dimensione 2 si consideri la forma bilineare $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ data da

$$\phi(v, w) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - x_2 y_2$$

dove (x_1, x_2) e (y_1, y_2) sono coordinate rispettivamente di v e w in una base fissata. La forma ϕ è un prodotto scalare su V?

Esercizio 194. Si consideri nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito della base canonica il prodotto

$$\phi(v, w) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - x_2 y_2$$

dove (x_1, x_2) e (y_1, y_2) sono coordinate rispettivamente di v e w in una base fissata. La forma ϕ è un prodotto scalare su V?

Esercizio 195. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto dello spazio vettoriale euclideo V (di dimensione finita), cioè si ha $\langle\, f(u), v\,\rangle \;=\; \langle\, u, f(v)\,\rangle$ per ogni $u, v \in V$. Si dimostri che la matrice che rappresenta f rispetto ad una base ortonormale di V è simmetrica.

Esercizio 196. Si consideri la seguente forma bilineare su $\mathbb{R}^4$

$$b(v, w) \;=\; 3x_1y_1 + 3x_1y_4 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 + 3x_4y_1 + 3x_4y_4$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

i) Si scriva la matrice di b rispetto alla base canonica.

ii) Si determinino il rango e la segnatura di b.

iii) Si determini una base diagonalizzante per b.

Esercizio 197. In $\mathbb{R}^4$ si consideri la seguente forma bilineare

$$f\big(\,(x_1, x_2, x_3, x_4)\,,\,(y_1, y_2, y_3, y_4)\,\big) \;=\; x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2$$

i) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

ii) Si determini il rango di f, e si verifichi che f è alternante.

iii) Considerato il sottospazio $W \;=\; \langle\,(1,0,1,0), (2,0,0,0)\,\rangle$, dimostrare che $W^{\perp} = \{\, v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v, w) = 0 \;\text{ per ogni } w \in W \,\}$ è anch'esso un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base.

Esercizio 198. Sia $\mathscr{M}_n(K)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n sul campo K. Per ogni $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ chiameremo *traccia* di A l'elemento del campo K

$$tr(A) \;:=\; a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

Verificare che l'applicazione $\sigma : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $\sigma(A, B) \;:=\; tr({}^tA\,B)$ è un prodotto scalare su $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Scrivere la matrice associata a σ rispetto alla base canonica nel caso $n = 2$.

Esercizio 199. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

mediante la base canonica. Provare che F è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico, e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.

Esercizio 200. Diagonalizzare la seguente matrice hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

e stabilire se la forma hermitiana la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$ è A definisce su $\mathbb{C}^3$ una struttura di spazio unitario.

Esercizio 201. Sia M una matrice simmetrica $n \times n$, di rango r. Provare che esistono indici $i_1, \dots, i_{n-r}$ tali che la matrice M' ottenuta da M sopprimendo sia le righe che le colonne di indici $i_1, \dots, i_{n-r}$ è invertibile.

Esercizio 202. Sia V uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali, di dimensione finita $n \geq 2$. Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica di segnatura $(1, n-1)$. Sia infine $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che esiste $x \in W$ non nullo, con $f(x,x) \geq 0$. Se W^0 è l'ortogonale di W rispetto ad f, si provi che $f : W^0 \times W^0 \to \mathbb{R}$ è semidefinita negativa.

Esercizio 203. Provare che se $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ è hermitiana, allora anche $\bar{A}$ e ${}^t A$ sono hermitiane, e se A è invertibile, allora anche A^{-1} è hermitiana. Verificare che se $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sono hermitiane, allora AB è hermitiana se e solo se $AB = BA$.

Esercizio 204. Sia V uno spazio vettoriale unitario. Un endomorfismo $F : V \to V$ si chiama antisimmetrico se $\langle F(u), v \rangle = -\langle u, F(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$. Si dimostri che F è antisimmetrico se e solo se la matrice A che rappresenta F rispetto ad una base ortonormale di V è tale che ${}^t\bar{A} = -A$. Si dimostri poi che tutti gli autovalori di un endomorfismo antisimmetrico sono numeri complessi immaginari puri.

FORMA CANONICA DI JORDAN

Esercizio 205. Sia $\mathcal{A}$ una matrice quadrata, ad entrate nel campo K, con polinomio caratteristico $(x-\lambda)^n$, ove $\lambda \in K$. Si descriva l'algoritmo per trovare una base di K^n che dà la forma canonica di Jordan di $\mathcal{A}$.

Esercizio 206. Trovare tutte le forme normali di Jordan $\mathcal{A}$ di una matrice 4×4 su $\mathbb{R}$, con polinomio caratteristico $(x-\lambda)^4$. Per ciascuna di queste matrici si calcoli poi

$$d_i \;=\; dim_{\mathbb{R}} Ker(\mathcal{A} - \lambda E_4)^i \qquad \text{per} \;\; i = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

Sia $\mathcal{A}$ di una matrice $n \times n$ con polinomio caratteristico $(x-\lambda)^n$. Si dimostri che il numero di blocchi di Jordan nella forma normale di Jordan di $\mathcal{A}$ è uguale alla molteplicità geometrica d_1 di $\mathcal{A}$.

Esercizio 207. Sia $\mathcal{A}$ una matrice 5×5 sul campo K, con polinomio caratteristico $(x-\lambda)^5$. Definiti gli interi d_i per $1 \le i \le 5$ mediante la relazione analoga alla (1), sia $(d_1, \ldots, d_5) = (2, 4, 5, 5, 5)$. Si trovi la forma canonica di Jordan di $\mathcal{A}$.

Esercizio 208. Si trovi la forma canonica di Jordan per entrambe le matrici

$$\mathcal{A}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathcal{A}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si determinino poi $S_1, S_2 \in GL(4, \mathbb{R})$ tali che $S_i^{-1} \mathcal{A}_i S_i$ sia in forma canonica di Jordan.