Laurea Magistrale in Matematica

Università degli Studi di Trieste
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore 2 - A

Appello d'esame del 7 Febbraio 2017

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. In $\mathbb{R}^3$ con le coordinate standard (x, y, z), si consideri la forma differenziale $\omega = x \, \mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z - y \, \mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, z + z \, \mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

(a) *(2 punti)* Si calcoli il differenziale $\mathrm{d}\, \omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ di ω.

(b) *(5 punti)* Sia S^2 la sfera di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^3$, sia $i \colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ l'inclusione. Si calcoli l'integrale $\int_{S^2} i^* \omega$.
(*Suggerimento:* Si usi il teorema di Stokes per le varietà con bordo.)

(c) *(4 punti)* Si dica se $i^*\omega \in \Omega^2(S^2)$ è esatta oppure no.

2. Si consideri la varietà differenziabile $\mathbb{RP}^2 \backslash \{[1 : 0 : 0]\}$ (il piano proiettivo privato di un punto) e l'applicazione $f : \mathbb{RP}^2 \backslash \{[1 : 0 : 0]\} \to \mathbb{RP}^1$ definita nel seguente modo:

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_1 : x_2].$$

(a) *(4 punti)* Si dimostri che f è una funzione differenziabile.

(b) *(5 punti)* Si dimostri che f è un'equivalenza omotopica. (*Suggerimento:* considerare anche la mappa $g : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2 \backslash \{[1 : 0 : 0]\}$ definita tramite $g([x_1 : x_2]) = [0 : x_1 : x_2]$.)

(c) *(6 punti)* Si dimostri che $\mathbb{RP}^2 \backslash \{[1 : 0 : 0]\}$ ha la struttura di un fibrato vettoriale di rette su $\mathbb{RP}^1$ con proiezione f. Si tratta di un fibrato triviale oppure no? Giustificare la risposta.

(d) (**Facoltativo**, *3 punti*) Per ogni $n \geq 1$ si calcolino i gruppi di coomologia di De Rham dello spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ privato di un punto.

3. *(4 punti)* Sia M una varietà differenziabile e sia $U \subseteq M$ un sottoinsieme aperto. Si consideri U con la struttura di varietà differenziabile indotta da M. Si dimostri che, se M è orientabile, allora U è orientabile. Vale il viceversa?