SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE VARIABILI ALEATORIE DISCRETE 2

Esercizio 1. *Sono date due urne denominate rispettivamente A e B. A contiene 10 palline bianche e 6 palline rosse, B contiene 8 palline bianche e 8 palline rosse. Si estraggono ripetutamente, con reimmissione, delle palline da ciascuna urna. Sia X la v.a. numero di estrazioni di palline rosse da A prima dell'estrazione della prima pallina bianca. Sia Y la v.a. numero di estrazioni di palline rosse da B prima dell'estrazione della prima pallina bianca.*

i) Si determini $P(X = 3)$ e $P(Y \geq 3)$.

X è una variabile geometrica di costante $p = \frac{5}{8}$, mentre Y è una variabile geometrica di costante $q = \frac{1}{2}$. Si ha

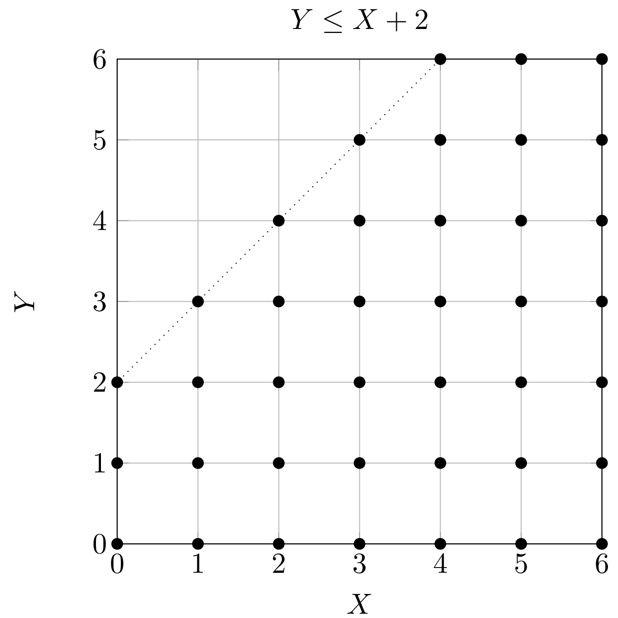
$$P(X = 3) = p_X(3) = p(1-p)^3 = \frac{5}{8}(\frac{3}{8})^3 \approx 0,032,$$

$$P(Y \geq 3) = \sum_{n=3}^{+\infty} q(1-q)^n = q(1-q)^3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}(1-q)^n = q\,(1-q)^3\,\frac{1}{q} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}.$$

ii) Si determini $P(Y \leq X + 2)$.

Si deve considerare il vettore aleatorio (X, Y) di densità $p_{X,Y}(i,j) = p(1-p)^i q\,(1-q)^j$ e si devono sommare le probabilità relative ai punti che giacciono nella regione in cui $Y \leq X + 2$. Quindi calcolo

$$\sum_{j \leq i+2} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i+2} p(1-p)^i q\,(1-q)^j = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i+2} \frac{5}{8}(\frac{3}{8})^i(\frac{1}{2})^{j+1}.$$

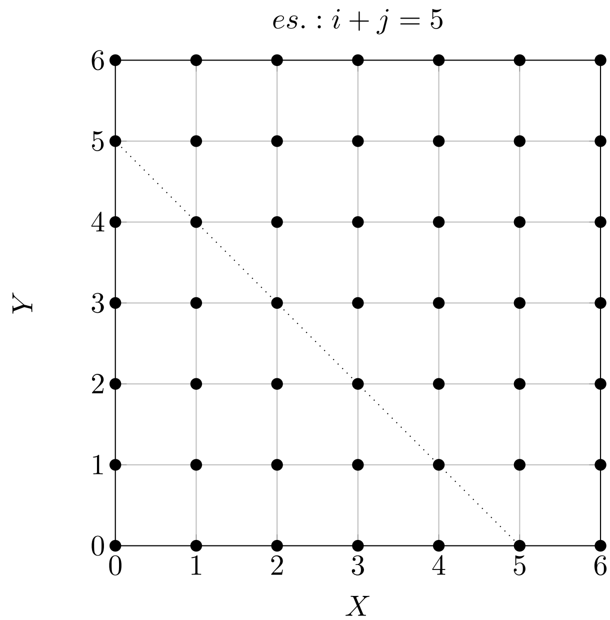


$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i+2}\frac{5}{8}(\frac{3}{8})^i(\frac{1}{2})^{j+1} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{5}{16}(\frac{3}{8})^i(\sum_{j=0}^{i+2}(\frac{1}{2})^j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{5}{16}(\frac{3}{8})^i(2-(\frac{1}{2})^{i+2}) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{5}{8}(\frac{3}{8})^i + \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{5}{64}(\frac{3}{16})^i \\
&= 1 - \frac{5}{52}
\end{aligned}$$

iii) Si determini la densità della v.a. $X+Y$.

Si considera di nuovo il vettore aleatorio (X,Y) di densità $p_{X,Y}(i,j) = p(1-p)^i q\,(1-q)^j$ e per determinare $p_Z(h)$ dove $Z = X+Y$ si devono sommare le probabilit‘a $p_{X,Y}(i,j)$ tali che $i+j=h$. Per esempio per determinare $p_Z(5)$ si devono sommare le probabilità relative ai punti sulla linea tratteggiata in figura. Si ottiene

$$p_Z(h) = \sum_{i+j=h} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i+j=h}\frac{5}{16}(\frac{3}{8})^i(\frac{1}{2})^j = \sum_{j=0}^{h}(\frac{3}{8})^{h-j}(\frac{1}{2})^j = \frac{5}{4}(\frac{1}{2})^h - \frac{5}{16}(\frac{3}{8})^h.$$



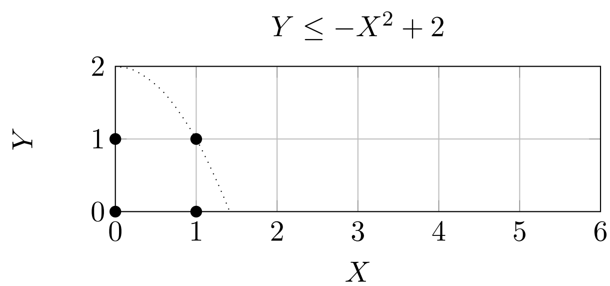
Esercizio 2. *Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge di Poisson di parametro 1, la seconda con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{3}$.*

i) Si calcoli $P(Y \leq -X^2+2)$.

Si deve considerare il vettore aleatorio (X,Y) di densità

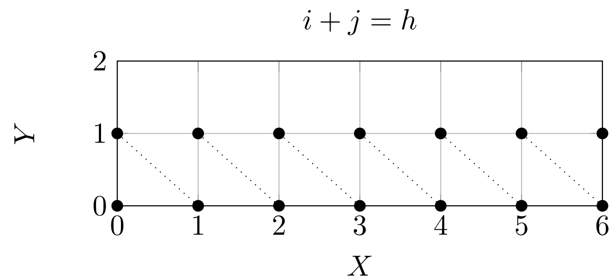
$$p_{X,Y}(i,j) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \cdot e^{-1} \dfrac{1}{i!} & \text{se } j = 0 \\ \dfrac{1}{3} \cdot e^{-1} \dfrac{1}{i!} & \text{se } j = 1 \end{cases}$$

Quindi



$$P(Y \leq -X^2+2) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1) = 2e^{-1}.$$

ii) Si determini la densità discreta della variabile aleatoria $Z = X+Y$.



Si ha

$$p_Z(0) = p_{X,Y}(0,0) = \frac{2}{3}\, e^{-1},$$

$$p_Z(h) = p_{X,Y}(h-1,1) + p_{X,Y}(h,0) = \frac{1}{3}\, e^{-1}\, \frac{1}{(h-1)!}, + \frac{2}{3}\, e^{-1}\, \frac{1}{h!} = \frac{1}{3}\, e^{-1}\, \frac{1}{(h-1)!}(1 + \frac{2}{h}).$$

iii) Si calcoli $E[ZX]$ *e* $Var(-3Z)$.

Si ha

$$E[ZX] = E[(X+Y)X] = E[X^2 + XY] = E[X^2] + E[X]E[Y] = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

$$Var(-3Z) = 9Var(X+Y) = 9Var(X) + 9Var(Y) = 9 + 2 = 11.$$

Esercizio 3. *Il numero di chiamate che vengono fatte ad un centralino in un certo intervallo di tempo si comporta come una v.a. di Poisson di parametro 2.*

i) Calcolare la probabilità che al centralino in quell'intervallo di tempo non arrivino chiamate.

La variabile aleatoria in questione è una Poisson di parametro 2. Quindi

$$p_X(n) = e^{-2} \cdot \frac{2^n}{n!},$$

ricaviamo allora

$$p_X(0) = e^{-2} \approx 0.135.$$

ii) Calcolare la probabilità che al centralino in quell'intervallo di tempo arrivino almeno 2 chiamate.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (p_X(0) + p_X(1)) = 1 - (e^{-2} + 2e^{-2}) \approx 0,593.$$

Esercizio 4. *Un'urna contiene 10 palline bianche e 10 palline rosse. Se ne estraggono 5 e si lancia una moneta equlibrata tante volte quante sono le palline bianche dell'estrazione. Sia* X *in numero di teste e* Y *in numero di croci.*

i) Determinare le densità delle variabili X, Y e del vettore aleatorio (X, Y).

Chiamiamo Z la variabile aleatoria "numero di palline bianche estratte". Si ha che Z è una varialbile aleatoria binomiale $B(5, \frac{1}{2})$. Quindi $p_z(j) = \binom{5}{j}\frac{1}{2^5}$. Di conseguenza, per $i = 0,\ 1, \ldots, 5$,

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{5} P(X = i|Z = j) \cdot P(Z = j),$$

dove

$$P(X = i|Z = j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j, \\ \binom{j}{i}\dfrac{1}{2^j} & \text{se } i \leq j. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0,\ j\geq i}^{5} \binom{j}{i}\frac{1}{2^j}\binom{5}{j}\frac{1}{2^5} \\ &= \sum_{j=0,\ j\geq i}^{5} \frac{5!}{(5-j)!(j-i)!i!}\ \frac{1}{2^{5+j}} \\ &= \frac{1}{i!}\ \frac{1}{2^5}\sum_{j=i}^{5} \frac{5!}{(5-j)!(j-i)!}\ \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{i!}\ \frac{1}{2^5}\sum_{h=0}^{5-i} \frac{5!}{(5-i-h)!(h)!}\ \frac{1}{2^{h+i}} \\ &= \frac{5!}{(5-i)!i!}\ \frac{1}{2^{5+i}}\sum_{h=0}^{5-i} \frac{5-i!}{(5-i-h)!(h)!}\ \frac{1}{2^h} \\ &= \binom{5}{i}\ \frac{1}{2^{5+i}}\sum_{h=0}^{5-i} \binom{5-i}{h}\ \frac{1}{2^h} \\ &= \binom{5}{i}\ \frac{1}{2^{5+i}}(\frac{1}{2}+1)^{5-i} \\ &= \binom{5}{i}(\frac{3}{4})^{5-i}(\frac{1}{4})^i, \end{aligned}$$

quindi $X = B(5, \frac{1}{4})$. Poiché sappiamo che $Y = 5 - X$ si ha che anche $Y = B(5, \frac{1}{4})$.

Per determinare la densità congiunta ragioniamo nel seguente modo: si ha

$$P(X = i,\ Y = j\,|\,Z = k) = \begin{cases} 0 & \text{se } i + j \neq k, \\ P(X = i\,|\,Z = k) & \text{se } i + j = k, \end{cases}$$

quindi

$$P(X=i,\ Y=j\,|\,Z=k)=\begin{cases} 0 & \text{se } i+j\neq k,\\ \binom{i+j}{i}\dfrac{1}{2^{i+j}} & \text{se } i+j=k,\end{cases}$$

e

$$P(Z=k)=P(Z=i+j)=\binom{5}{i+j}\frac{1}{2^5},$$

quindi, se $i+j\leq 5$ si ha

$$p_{X,Y}(i,j)=\sum_{k=0}^{5}P(X=i,\,Y=j\,|\,Z=k)\cdot P(Z=k)=\frac{5!}{i!j!(5-i-j)!}\,\frac{1}{2^{5+i+j}},$$

mentre se $i+j>5$ si ha $p_{X,Y}(i,j)=0$.

ii) Dire se X e Y sono indipendenti.

Non sono indipendenti: la matrice della probabilità congiunta è triangolare.

Esercizio 5. *Siano X, Y due v.a. geometriche indipendenti, la prima tale che*

$$P(X=0)=2P(X=1)$$

e la seconda di parametro $\frac{1}{2}$. Sia $Z=X+Y$.
i) Determinare le densità della variabile aleatoria Z.

Abbiamo $p_X(n)=p(1-p)^n$, quindi $p_X(0)=p$ e $p_X(1)=p(1-p)$, da cui si ha che $p=2p(1-p)$, cioè $p=2p^2$ e finalmente $p=\frac{1}{2}$. Quindi X e Y sono due variabili aleatorie geometriche indipendenti di costante $\frac{1}{2}$. Quindi il vettore aleatorio (X,Y) ha densità

$$p_{X,Y}(i.j)=\frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

Quindi

$$p_Z(k)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^{(k-j)+j+2}}=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^{k+2}}=\frac{k+1}{2^{k+2}}.$$

ii) Calcolare $P(X=3\,|\,Z\geq 5)$.

Dalla definizione sappiamo che

$$\begin{aligned}P(X=3\,|\,Z\geq 5)\ &=\frac{P(X=3\cap Z\geq 5)}{P(Z\geq 5)}=\frac{P(X=3\cap Y\geq 2)}{P(Z\geq 5)}\\ &=\frac{P(X=3)\cdot P(Y\geq 2)}{P(Z\geq 5)}.\end{aligned}$$

Resta da calcolare $P(Y \geq 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) = \frac{1}{4}$ e $P(Z \geq 5) = 1 - (P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4)) = \frac{7}{64}$. Quindi

$$P(X = 3 \,|\, Z \geq 5) = \frac{\frac{1}{16}\frac{1}{4}}{\frac{7}{64}} = \frac{1}{7}.$$

iii) Calcolare $P(Z \geq 5 \,|\, X = 3)$.

$$\begin{aligned} P(Z \geq 5 \,|\, X = 3) &= \frac{P(Z \geq 5 \cap X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{P(Y \geq 2 \cap X = 3)}{P(X = 3)} \\ &= \frac{P(Y \geq 2) \cdot P(X = 3)}{P(X = 3)} = P(Y \geq 2) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

iv) Determinare $E[XZ]$.

Si ha

$$E[XZ] = E[X(X + Y)] = E[X^2] + E[X]E[Y] = 4.$$