ESERCIZI SULLE VARIABILI ALEATORIE CONTINUE 1

Esercizio 1. Sia, per qualche $a > 0$,

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \quad \text{oppure} \quad t > 3a, \\ a - \dfrac{1}{3}t & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 3a. \end{cases}$$

i) Si determini il valore di a affinché f_X sia la densità di una variabile aleatoria continua che chiameremo X .
ii) Si determini media e varianza di X.
iii) Denominata con Y una variabile aleatoria continua e uniforme su $(0, 3a)$, Y indipendente da X, si determini $P(X \geq Y)$.

Esercizio 2. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge uniforme continua su $(0, 4)$, la seconda, per qualche $k > 0$, abbia densità

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \quad \text{oppure} \quad t > 4, \\ k\,t & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

i) Si determini il valore di k.
ii) Si determini $E[X + 2Y]$ e $Var(Y)$.
iii) Si calcoli $P(X \geq 2 \cup Y \leq 2)$.

Esercizio 3. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e la seconda con legge Gamma di parametri $a = 2$ e $\lambda = 1$.

i) Si determini $E[X^2Y]$ e $Var(X - 2Y)$.
ii) Si calcoli $P(X \geq Y)$.
iii) Si determini la densità di $Z = X + Y$.

Esercizio 4. Due autobus che fanno lo stesso tragitto (per es.: Via del Coroneo - Piazzale Europa) passano a una fermata nell'intervallo di tempo $10.00 - 10.15$ come due variabili aleatorie indipendenti continue e uniformi. Un passeggero che alle 10.00 si trova alla fermata prende il primo autobus che passa. Quanto attende in media?

Esercizio 5. Un componente elettronico essenziale per il funzionamento di un dispositivo ha un tempo di vita espresso tramite una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. Quando il componente elettronico si guasta viene immediatamente sostituito da un analogo componente. Ciò avviene finché ci sono ricambi. Il numero dei ricambi è una variabile aleatoria di Poisson di costante μ indipendente dalla precedente. Quanto vive in media il dispositivo?