

# Struttura per Scadenza dei Tassi

31

## STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI

- ▷ Obiettivo è la costruzione della struttura per scadenza dei tassi (o CURVA DEI TASSI).
- ▷ A tal fine si considera un modello idealizzato di mercato obbligazionario, caratterizzato da numerose ipotesi semplificatrici, più o meno forti.
- ▷ Nella realtà la curva dei tassi è relativa ad un emittente (e.g. uno stato) o ad un certo tipo di mercato (LIBOR, EURIBOR, imprese con un dato rating), ad una certa valuta, ad un certo intervallo temporale,...

32

## IPOTESI: SCADENZARIO

- ▷ Sia  $\mathbb{T}$  lo **scadenzario** (tenor), cioè l'insieme delle epoche in cui avvengono le transazioni. In particolare, concentriamo l'attenzione su due casi.

- ★ Scadenzario **discreto** (finito o infinito):

$$\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Caso particolare:  $t_i - t_{i-1} = \Delta$  per ogni  $i \geq 1$ .

- ★ Scadenzario **continuo**:

$$\mathbb{T} = [0, T] \text{ oppure } \mathbb{T} = [0, +\infty[$$

- ★  $0 =$  oggi; il tempo viene misurato in anni.

## IPOTESI: MERCATI PERFETTI

- ▷ Mercato **COMPETITIVO**: gli agenti sono **price-takers** (non price-makers) cioè con le loro azioni non modificano i prezzi.
- ▷ Mercato privo di **FRIZIONALITÀ**: non ci sono **tassazioni** sui guadagni, né **costi di transazione**, non ci sono vincoli di **vendita allo scoperto** (short-selling) e i titoli sono **perfettamente divisibili**.
- ▷ Mercato privo di **OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO (AOA)**.  
Un'**arbitraggio** (free-lunch) è una strategia che produce una sequenza di cash-flows nonnegativi in ogni epoca ed in ogni stato del mondo, e, con probabilità positiva, un cash-flow positivo in qualche epoca.
- ★ AOA è condizione necessaria per l'**equilibrio**;
- ★ AOA  $\Rightarrow$  **Legge del prezzo unico**: due strategie che offrono gli stessi cash-flows devono avere lo stesso valore iniziale.

## STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI

- ▷ Per ogni  $s \in \mathbb{T}$ ,  $s > 0$  supponiamo che vi sia un titolo a cedola nulla (TCN) con scadenza in  $s$ , di valore nominale 1€, e che tale titolo possa essere scambiato ad ogni epoca  $t \in \mathbb{T}$ ,  $t < s$ . Il suo prezzo sarà indicato con  $B(t, s)$ .
- ▷  $B(t, s)$  può essere visto come **fattore di sconto** tra  $s$  e  $t$ : il valore in  $t$  di  $C$ € in  $s$  è  $CB(t, s)$ .
- ▷ Proprietà di  $B(t, s)$ :
  - ★ Ci mettiamo nel caso in cui i TCN siano **default-free**, cioè pagano con certezza 1€ a scadenza. A tal fine possiamo pensare a titoli emessi da uno stato o altro emittente con rating elevato. Di conseguenza deve essere  $B(s, s) = 1$ .
  - ★ Per AOA, deve essere inoltre  $B(t, s) > 0$  per  $t < s$  e  $B(t, s) = 0$  per  $t > s$ .
- ▷ Si chiama **struttura per scadenza dei prezzi** all'epoca  $t \in \mathbb{T}$  la funzione

$$s \rightarrow B(t, s); \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

35

## STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- ▷ Convenzione: tutti i tassi che consideriamo sono **annualizzati**.
- ▷ Definiamo il **tasso a pronti** in  $t$  per l'epoca  $s$ ,  $r(t, s)$ , con  $t, s \in \mathbb{T}$ ,  $t < s$  tramite la

$$B(t, s) = e^{-(s-t)r(t,s)}.$$

- ★ Quindi  $r(t, s)$  è il tasso di rendimento (intensità d'interesse), in regime di interesse composto, corrispondente all'operazione in cui si compra in  $t$  il TCN e lo si detiene fino alla scadenza  $s$ .
- ★ Si tratta di tassi a pronti (**spot**), cioè tassi concordati in  $t$  per un investimento che inizia in  $t$  stesso.
- ▷ Riesce dunque

$$r(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log B(t, s)$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi a pronti** all'epoca  $t \in \mathbb{T}$  è la funzione

$$s \rightarrow r(t, s); \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi**.

36

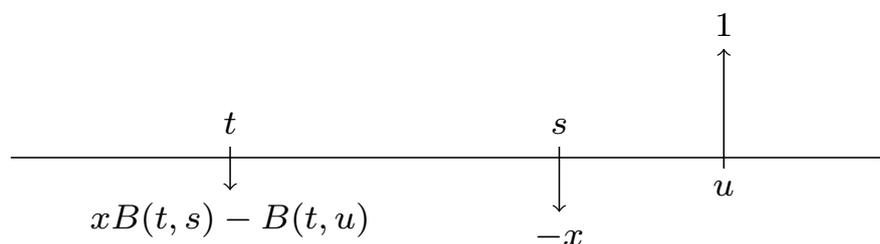
## DAY COUNT CONVENTIONS

- ▷ Al fine di calcolare tassi e rendimenti, occorre calcolare la frazione d'anno che intercorre fra due date. Prevalgono regole di calcolo diverso a seconda dei mercati e degli strumenti. La maggior parte delle regole rientrano fra le seguenti (o fra loro varianti).
  1. **Actual/Actual**: numero effettivo di giorni fra le due date rapportato al numero effettivo di giorni nell'anno (365 o 366), con correzioni se fra due anni diversi.
  2. **Actual/360** (Variante: Actual/365): numero effettivo di giorni fra le due date diviso 360 (o 365).
  3. **30/360**: ogni mese ha 30 giorni, ogni anno ha 360 giorni.
- ▷ Esempio: frazione d'anno tra 27/2/07 e 5/1/07: 1)  $53/365 = 0.1452$ , 2)  $53/360 = 0.1472$ , 3)  $52/360 = 0.1444$ .
- ▷ Importanti sono anche le 'business date conventions', in base alle quali date di pagamento che coincidono con festività vengono convertite in date lavorative.

37

## TASSI A TERMINE

- ▷ A differenza dei tassi a pronti, i **tassi a termine** o **forward** sono relativi a investimenti concordati in un dato istante, che iniziano in un istante successivo.
- ▷ Fissati  $t, s, u \in \mathbb{T}$  con  $t \leq s < u$ , consideriamo la seguente operazione costruita all'epoca  $t$ .
  - ★ Acquisto un TCN con scadenza  $u$ : flusso in  $t$  pari a  $-B(t, u)$  ed in  $u$  pari a  $+1$ ;
  - ★ vendo  $x$  TCN con scadenza  $s$ : flusso in  $t$  pari a  $+xB(t, s)$  ed in  $s$  pari a  $-x$ .



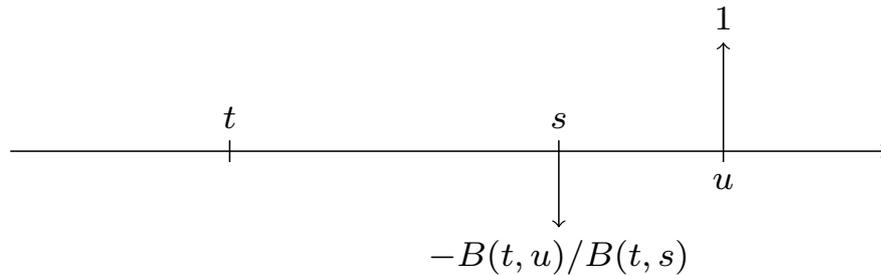
38

## ... TASSI A TERMINE

- ▷ ★ Scegliamo  $x$  in maniera tale che il flusso in  $t$  sia nullo:

$$xB(t, s) - B(t, u) = 0 \Leftrightarrow x = B(t, u)/B(t, s).$$

- ★ La situazione è allora



- ▷ Tale operazione genera flussi di cassa in  $s$  ed  $u$ , ma non in  $t$  (istante in cui l'operazione è concordata).

39

## ... TASSI A TERMINE

- ▷ Si definisce **tasso a termine** in  $t$  per il periodo  $[s, u]$ ,  $f(t, s, u)$ , il tasso di rendimento (in regime di interesse composto) corrispondente a questa operazione:

$$\frac{B(t, u)}{B(t, s)} = e^{-(u-s)f(t, s, u)},$$

da cui si ricava che

$$f(t, s, u) = -\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)}.$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi forward** all'epoca  $t$  è la funzione

$$(s, u) \rightarrow f(t, s, u), \quad u > s \geq t, \quad s, u \in \mathbb{T}.$$

40

## PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ È equivalente conoscere, ad una certa epoca  $t$ , i prezzi  $B(t, s)$ , i tassi a pronti  $r(t, s)$  o i tassi a termine  $f(t, s, u)$ .
- ★ Infatti, noti i prezzi, si determinano (per costruzione) i tassi a termine.
  - ★ Viceversa, noti i tassi a termine, si hanno come caso particolare i tassi a pronti: ponendo  $s = t$  in  $f(t, s, u)$  si trova

$$\begin{aligned} f(t, t, u) &= -\frac{1}{u-t} \log \frac{B(t, u)}{B(t, t)} \\ &= -\frac{1}{u-t} \log B(t, u) \\ &= r(t, u). \end{aligned}$$

- ★ Infine, come già osservato, noti i tassi a pronti, sono noti anche i prezzi.

41

## PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Per  $t, u \in \mathbb{T}$  e  $t < u$ ,  $r(t, u) > 0 \Leftrightarrow B(t, u) < 1$  cioè i tassi a pronti sono positivi se e solo se il corrispondente TCN vende a sconto.
- ▷ L'ultima proprietà ha le seguenti implicazioni: le seguenti proposizioni sono equivalenti
1.  $B(t, s) > B(t, u)$  per  $t, s, u \in \mathbb{T}$  e  $t \leq s < u$
  2.  $f(t, s, u) > 0$  per  $t, s, u \in \mathbb{T}$  e  $t \leq s < u$
  3.  $B(t, u) < 1$  per  $t, u \in \mathbb{T}$  e  $t < u$
  4.  $r(t, u) > 0$  per  $t, u \in \mathbb{T}$  e  $t < u$
- (1)  $\Leftrightarrow$  (2) segue dalla definizione di  $f(t, s, u)$ ,

$$B(t, u) = B(t, s)e^{-f(t, s, u)(u-s)}.$$

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) è stata vista sopra.

(1)  $\Rightarrow$  (3) basta prendere  $t = s$  in (1). Per provare che

(3)  $\Rightarrow$  (1), consideriamo la seguente strategia: in  $t$  acquisto di un TCN con scadenza  $s$ , vendita di un TCN con scadenza  $u$ ; in  $s$  acquisto di un TCN con scadenza  $u$

42

## PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ I flussi di cassa sono:
- ★ in  $t$ ,  $-B(t, s) + B(t, u)$
  - ★ in  $s$ ,  $1 - B(s, u)$
  - ★ in  $u$ ,  $1 - 1 = 0$

essendo il flusso in  $s$  dato da  $1 - B(s, u) > 0$  (da (3)), il flusso in  $t$  deve essere  $-B(t, s) + B(t, u) < 0$ , cioè  $B(t, u) < B(t, s)$  altrimenti ci sarebbe un arbitraggio.

- ▷ quindi se i tassi sono positivi la ‘discount function’ è decrescente.

43

## PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Fissiamo  $t < s < u$ ;
- ★ partendo dalla

$$B(t, u) = B(t, s)e^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

sostituendo i tassi a pronti si trova

$$e^{-(u-t)r(t,u)} = e^{-(s-t)r(t,s)} e^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

- ★ passando ai logaritmi e esplicitando  $r(t, u)$ ,

$$r(t, u) = \frac{s-t}{u-t} r(t, s) + \frac{u-s}{u-t} f(t, s, u)$$

cioè il tasso ‘a lungo termine’  $r(t, u)$  è **media ponderata** del tasso ‘a breve termine’  $r(t, s) = f(t, t, s)$  e del tasso forward  $f(t, s, u)$ ;

44

## TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Dalla relazione che esprime  $r(t, u)$  come media ponderata di  $r(t, s)$  e  $f(t, s, u)$  si trova che, per  $t, s, u \in \mathbb{T}$

$$r(t, s) > r(t, u) \Leftrightarrow r(t, s) > r(t, u) > f(t, s, u)$$

$$r(t, s) < r(t, u) \Leftrightarrow r(t, s) < r(t, u) < f(t, s, u).$$

- ▷ Ne segue che
- ★ Se la struttura dei tassi a pronti è crescente (descrescente) allora è dominata dai (domina i) tassi a termine.
  - ★ Quando la curva dei tassi a pronti ‘cambia andamento’, cioè passa da crescita a decrescenza o viceversa, allora la curva dei tassi a termine ‘attraversa’ quella dei tassi a pronti.

45

## TASSI E INTENSITÀ

- ▷ In luogo delle intensità di interesse,  $r(t, s)$  (spot) e  $f(t, s, u)$  (forward), si possono utilizzare i corrispondenti tassi di interesse.
- ▷ Il legame tra queste quantità è dato da

$$(1 + \text{tasso})^{\text{periodo}} = e^{\text{periodo} \cdot \text{intensità}}.$$

- ▷ Avremo quindi i tassi  $i(t, s)$  (spot) e  $i_f(t, s, u)$  (forward), definiti da

$$1 + i(t, s) = e^{r(t, s)}$$

$$1 + i_f(t, s, u) = e^{f(t, s, u)},$$

e legati da

$$(1 + i(t, u))^{u-t} = (1 + i(t, s))^{s-t} (1 + i_f(t, s, u))^{u-s},$$

quindi il fattore di capitalizzazione ‘a lungo’  $1 + i(t, u)$  è media geometrica dei corrispondenti fattori ‘a breve’ e a termine.

46

## TASSI SEMPLICI

- ▷ A volte si calcola il rendimento di un'operazione basandosi su tassi **semplici** (cioè in regime di interesse semplice), soprattutto per investimenti di durata inferiore a 1 anno.
- ▷ Definiamo allora il **tasso semplice** a pronti in  $t$  per l'epoca  $s$ ,  $L(t, s)$ , con  $t, s \in \mathbb{T}$  e  $t \leq s$ , come il tasso in regime di interesse semplice corrispondente ad un investimento tra  $t$  e  $s$ :

$$B(t, s) = \frac{1}{1 + L(t, s)(s - t)},$$

da cui si ricava

$$L(t, s) = \frac{1}{s - t} \left[ \frac{1}{B(t, s)} - 1 \right].$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi semplici** all'epoca  $t \in \mathbb{T}$  è la funzione

$$s \rightarrow L(t, s), \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la curva dei tassi semplici.

47

## TASSI SEMPLICI A TERMINE

- ▷ Il tasso semplice a termine in  $t$  per il periodo  $[s, u]$ ,  $L_f(t, s, u)$ , con  $t \leq s < u$  e  $t, s, u \in \mathbb{T}$  è definito implicitamente da

$$(1 + L(t, s)(s - t))(1 + L_f(t, s, u)(u - s)) = (1 + L(t, u)(u - t)),$$

- ▷ Il legame con le altre quantità introdotte in precedenza è dato da:

$$\begin{aligned} L_f(t, s, u) &= \frac{1}{u - s} \left[ \frac{1 + L(t, u)(u - t)}{1 + L(t, s)(s - t)} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{u - s} \left[ \frac{B(t, s)}{B(t, u)} - 1 \right] \\ &= \frac{e^{(u-s)f(t,s,u)} - 1}{u - s}. \end{aligned}$$

48

## SCADENZARIO DISCRETO

- ▷ Consideriamo il caso  $\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ ;
- ★ poniamo  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$  per  $i \geq 0$ .
  - ★ Per  $t_i, t_j \in \mathbb{T}$  con  $t_i \leq t_j < \sup \mathbb{T}$ , definiamo il **tasso a termine uniperiodale** in  $t_i$  per  $t_j$ ,  $f(t_i, t_j)$ , come il tasso a termine dell'investimento stabilito in  $t_i$ , che comincia in  $t_j$  e termina nell'epoca successiva  $t_{j+1}$ :

$$\begin{aligned} f(t_i, t_j) &= f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= -\frac{1}{\Delta_j} \log \frac{B(t_i, t_{j+1})}{B(t_i, t_j)}. \end{aligned}$$

- ▷ La **struttura dei tassi a termine uniperiodali** all'epoca  $t \in \mathbb{T}$  è la funzione

$$s \rightarrow f(t, s), \quad t < s < \sup \mathbb{T}, \quad t, s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine uniperiodali**.

49

## SCADENZARIO DISCRETO

- ▷ Dai tassi uniperiodali si possono ricostruire le altre quantità:
- ★ I prezzi dei TCN e i tassi a pronti: per  $t_i < t_j$  con  $t_i, t_j \in \mathbb{T}$ ,

$$B(t_i, t_j) = e^{-\sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{1}{t_j - t_i} \sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l),$$

- ★ I tassi a termine: per  $t_i \leq t_j < t_k$ , con  $t_i, t_j, t_k \in \mathbb{T}$ ,

$$f(t_i, t_j, t_k) = \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{l=j}^{k-1} \Delta_l f(t_i, t_l).$$

- ★ I tassi a pronti e a termine sono **medie ponderate** dei tassi uniperiodali sui corrispondenti periodi di investimento.
- ▷ Definiamo ancora il **tasso a pronti uniperiodale** in  $t_i \in \mathbb{T}$  con  $t_i < \sup \mathbb{T}$ ,  $r(t_i)$ , come

$$r(t_i) = f(t_i, t_i) = r(t_i, t_{i+1}) = -\frac{1}{\Delta_i} \log B(t_i, t_{i+1})$$

cioè  $B(t_i, t_{i+1}) = e^{-\Delta_i r(t_i)}$ .

## TASSI SEMPLICI UNIPERIODALI

- ▷ In regime di interesse semplice, si definiscono i corrispondenti tassi semplici uniperiodali a termine:

$$\begin{aligned} L_f(t_i, t_j) &= L_f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_j} \left[ \frac{B(t_i, t_j)}{B(t_i, t_{j+1})} - 1 \right] \\ &= \frac{e^{\Delta_j f(t_i, t_j)} - 1}{\Delta_j}, \end{aligned}$$

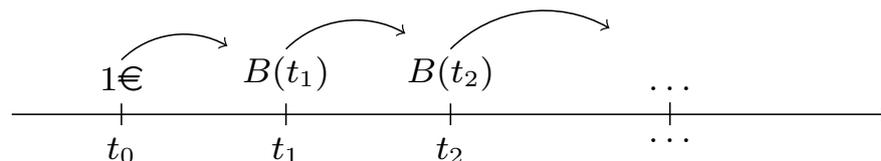
- ▷ e quello a pronti:

$$\begin{aligned} L(t_i) &= L_f(t_i, t_i) = L(t_i, t_{i+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_i} \left[ \frac{1}{B(t_i, t_{i+1})} - 1 \right] \\ &= \frac{e^{\Delta_i r(t_i)} - 1}{\Delta_i}. \end{aligned}$$

51

## MONEY MARKET INSTRUMENT

- ▷ Chiamiamo **money market instrument** il titolo, il cui prezzo all'epoca  $t$  è indicato con  $B(t)$ , costruito a partire dai TCN di tutte le scadenze mediante la seguente strategia (detta **roll-over**):
- ★ in  $t_0 = 0$ , 1€ viene investito in TCN con scadenza  $t_1$ , epoca in cui si riceve l'ammontare  $B(t_1) = e^{\Delta_0 r(0)}$ ;
  - ★ ad ogni epoca successiva  $t_i$ , l'ammontare  $B(t_i)$  viene investito in TCN con scadenza  $t_{i+1}$ , epoca in cui si riceve  $B(t_i)e^{\Delta_i r(t_i)}$ ;



- ▷ Riassumendo, tale strumento finanziario è tale che il suo prezzo verifica la  $B(0) = B(t_0) = 1$  e, per  $t_i \in \mathbb{T}$ ,

$$B(t_i) = e^{\sum_{l=0}^{i-1} \Delta_l r(t_l)} = \prod_{l=0}^{i-1} \frac{1}{B(t_l, t_{l+1})} = \prod_{l=0}^{i-1} (1 + \Delta_l L(t_l)).$$

52

Tassi EURIBOR -  $t_i=1/12/06$ 

$t_j - t_i$	$L(t_i, t_j)$
1s	3.33
2s	3.45
3s	3.52
1m	3.59
2m	3.62
3m	3.64
4m	3.68
5m	3.72
6m	3.74
7m	3.77
8m	3.79
9m	3.81
10m	3.83
11m	3.84
12m	3.85

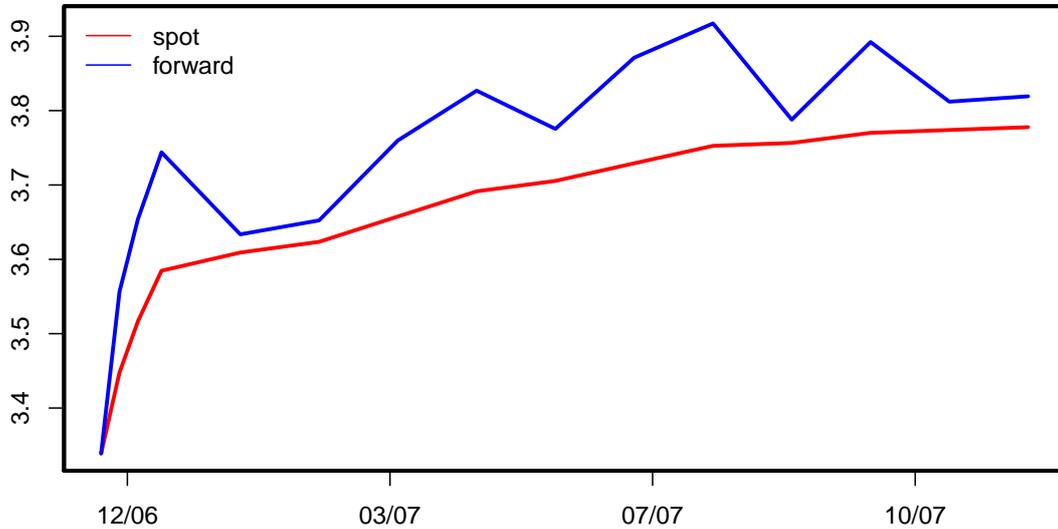
53

Tassi EURIBOR composti -  $t_i=1/12/06$ 

$t_j - t_i$	$r(t_i, t_j)$	$f(t_i, t_{j-1})$
1s	3.33	3.33
2s	3.45	3.57
3s	3.52	3.65
1m	3.58	3.73
2m	3.61	3.63
3m	3.62	3.66
4m	3.66	3.76
5m	3.69	3.83
6m	3.71	3.77
7m	3.73	3.87
8m	3.74	3.84
9m	3.76	3.86
10m	3.77	3.89
11m	3.77	3.81
12m	3.78	3.82

54

## TASSI A PRONTI E A TERMINE



55

## SCADENZARIO CONTINUO

- ▷ Nel caso  $\mathbb{T} = [0, T]$  oppure  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ , per  $t, s \in \mathbb{T}$  con  $t \leq s < \sup \mathbb{T}$  definiamo il **tasso forward istantaneo** in  $t$  per  $s$  come (assumendo che il limite esista)

$$f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} f(t, s, u).$$

- ▷ Riesce

$$\begin{aligned} f(t, s) &= \lim_{u \downarrow s} \left( -\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)} \right) \\ &= -\lim_{u \downarrow s} \frac{\log B(t, u) - \log B(t, s)}{u-s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s) \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)}. \end{aligned}$$

56

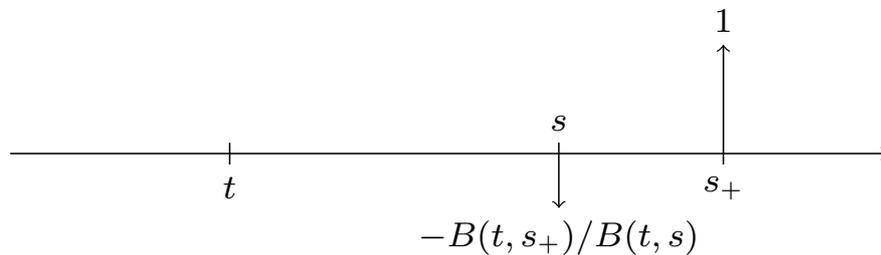
## SCADENZARIO CONTINUO

▷ Interpretazione:

- ★ ‘ $f(t, s) = f(t, s, s_+)$ ’, cioè  $f(t, s)$  è il tasso a termine istantaneo concordato in  $t$ , per un investimento che inizia in  $s$  e finisce un istante dopo (in  $s_+$ ).
- ★ Infatti consideriamo l’operazione concordata in  $t$ , in cui acquisto un TCN che scade in  $s_+ = s + \Delta s$  (con  $\Delta s > 0$ ) e vendo  $B(t, s_+)/B(t, s)$  TCN con scadenza  $s$ . Il costo in  $t$  di tale operazione è 0

$$\frac{B(t, s_+)}{B(t, s)} B(t, s) - B(t, s_+) = 0,$$

per cui la situazione è



57

## TASSI FORWARD ISTANTANEI

▷ ★ L’interesse generato da tale operazione è

$$\begin{aligned} \text{Montante} - \text{Capitale iniziale} &= 1 - \frac{B(t, s_+)}{B(t, s)} \\ &\cong 1 - \frac{B(t, s) - f(t, s)B(t, s)\Delta s}{B(t, s)} \\ &= f(t, s)\Delta s. \end{aligned}$$

▷ La **struttura dei tassi a termine istantanei** all’epoca  $t \in \mathbb{T}$  è la funzione

$$s \rightarrow f(t, s), \quad t, s \in \mathbb{T}, \quad t \leq s < \sup \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine istantanei**.

58

## TASSI FORWARD ISTANTANEI

▷ Dai tassi istantanei si ricavano tutte le altre quantità.

★ infatti riesce, per  $t, s \in \mathbb{T}$  con  $t < s$ ,

$$\begin{aligned} \int_t^s f(t, v) dv &= - \int_t^s \frac{\partial}{\partial v} \log B(t, v) dv \\ &= -[\log B(t, s) - \log B(t, t)] \\ &= -\log B(t, s), \end{aligned}$$

da cui

$$B(t, s) = e^{-\int_t^s f(t, v) dv}.$$

★ Noti i prezzi si possono trovare anche gli altri tassi in funzione di quelli istantanei.

59

## TASSI FORWARD ISTANTANEI

▷ ★ Si trova infatti che per  $t, s \in \mathbb{T}$  con  $t < s$

$$\begin{aligned} r(t, s) &= -\frac{1}{s-t} \log B(t, s) \\ &= \frac{1}{s-t} \int_t^s f(t, v) dv, \end{aligned}$$

★ più in generale, per  $t, s, u \in \mathbb{T}$  con  $t \leq s < u$ ,

$$\begin{aligned} f(t, s, u) &= \frac{u-t}{u-s} r(t, u) - \frac{s-t}{u-s} r(t, s) \\ &= \frac{1}{u-s} \left( \int_t^u f(t, v) dv - \int_t^s f(t, v) dv \right) \\ &= \frac{1}{u-s} \int_s^u f(t, v) dv. \end{aligned}$$

★ Quindi i tassi  $r(t, s)$  e  $f(t, s, u)$  sono le **medie** dei tassi istantanei sui corrispondenti periodi di investimento.

60

## TASSO A PRONTI ISTANTANEO

- ▷ Possiamo ancora definire, per  $t \in \mathbb{T}$  con  $t < \sup \mathbb{T}$ , il **tasso a pronti istantaneo** come

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t, t) \\ &= \lim_{s \downarrow t} r(t, s) \\ &= - \left[ \frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s) \right]_{s=t} \\ &= - \left[ \frac{\partial}{\partial s} B(t, s) \right]_{s=t} \end{aligned}$$

quindi è il tasso che remunera un investimento che inizia in  $t$  e finisce immediatamente dopo (in ' $t_+ = t + \Delta t$ ').

61

## TASSO SEMPLICI ISTANTANEI

- ▷ Se partiamo dai tassi semplici e definiamo in maniera analoga a prima i tassi istantanei

$$L_f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} L_f(t, s, u), \quad L(t) = L_f(t, t),$$

si trova

$$\begin{aligned} L_f(t, s) &= \lim_{u \downarrow s} L_f(t, s, u) \\ &= \lim_{u \downarrow s} \frac{B(t, s) - B(t, u)}{(u - s)B(t, u)} \\ &= - \frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)} \\ &= f(t, s) \end{aligned}$$

e quindi anche  $L(t) = r(t)$ . I tassi istantanei sono gli stessi in regime di interesse composto e semplice.

62

## MONEY MARKET INSTRUMENT

- ▷ Possiamo infine definire il **money market instrument** o **conto bancario** come il titolo (supposto esistente), il cui prezzo all'epoca  $t$  si indica con  $B(t)$ , costruito a partire dai TCN relativi a tutte le scadenze:
- ★ si parte con 1€ all'epoca 0;
  - ★ in ogni istante  $t$  il valore di questo titolo viene investito in TCN che scadono immediatamente dopo, e così via. Formalmente, il prezzo del titolo verifica

$$\begin{cases} B(0) = 1 \\ dB(t) = B(t)r(t)dt, \end{cases}$$

- ★ quindi si trova

$$B(t) = e^{\int_0^t r(v)dv}.$$

63

## STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

- ▷ All'istante di valutazione  $t = 0$  conosciamo la struttura per scadenza corrente ma non evidentemente la sua evoluzione futura, cioè  $B(s, u)$  (e quindi  $r(s, u)$ ,  $r(s)$ ,  $B(s)$ , ...) con  $0 < s \leq u$  sono variabili aleatorie.
- ▷ Se assumiamo che le varie quantità  $B(s, u)$  siano in realtà **deterministiche** (non aleatorie) allora, in assenza di opportunità di arbitraggio, le seguenti proprietà equivalenti devono sussistere
1.  $B(t, u) = B(t, s)B(s, u)$  per ogni  $t \leq s \leq u$
  2.  $f(t, s, u) = r(s, u)$  per ogni  $t \leq s < u$
  3.  $f(t, s) = r(s)$  per ogni  $t < s$
  4.  $B(t, s) = \frac{B(t)}{B(s)}$

e quindi

$$B(t, s) = e^{-\sum_{t \leq t_j < s} \Delta_j r(t_j)}$$

nel caso di scadenario discreto, mentre nel caso di scadenario continuo

$$B(t, s) = e^{-\int_t^s r(v)dv}$$

64

## STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

- ▷ Che la (1) (o la (2)) segue dall'assenza di arbitraggi è immediato essendo  $B(s, u)$  (o  $r(s, u)$ ) noto in  $t < s$  e quindi deve essere

$$B(t, u) = B(t, s)B(s, u) = B(t, s)e^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

cioè l'attualizzazione tra  $s$  e  $u$  avviene al tasso  $r(s, u)$  o  $f(t, s, u)$ , che devono quindi coincidere.

La (2) implica la (3), basta prendere  $u = s+$  nel caso di scadenario discreto e  $\lim_{u \downarrow s}$  in caso di scadenario continuo.

La (4) segue poi dalla (3), essendo ad esempio nel caso di scadenario continuo

$$B(t, s) = e^{-\int_t^s f(t,u)du} = e^{-\int_t^s r(u)du} = \frac{B(t)}{B(s)}$$

Per finire, è subito visto che la (4) implica la (1):

$$B(t, u) = \frac{B(t)}{B(u)} = \frac{B(t)}{B(s)} \frac{B(s)}{B(u)} = B(t, s)B(s, u).$$

65

## UN MODELLO PARAMETRICO: NELSON-SIEGEL (1987)

- ▷  $\mathbb{T} = [0, \infty[$ .
- ★ Fissiamo  $t \geq 0$ ; il modello specifica la forma dei tassi forward istantanei all'epoca  $t$  per ogni scadenza successiva:

$$f(t, s) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(s-t)/a} + \beta_2 \frac{s-t}{a} e^{-(s-t)/a},$$

con  $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ . Il modello dipende da 4 parametri.

- ★  $f(t, s)$  dipende solo dall'ampiezza del periodo  $s - t$ . Nel seguito possiamo allora considerare  $t = 0$ :

$$f(0, t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a}.$$

- ▷ Questo modello e sue varianti vengono usato frequentemente per descrivere e/o stimare la curva dei tassi.

66

## ... NELSON-SIEGEL

▷ Deriviamo le altre quantità:

★ i tassi a pronti sono dati da

$$\begin{aligned} r(0, t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f(0, u) du \\ &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-t/a}}{t/a} - \beta_2 e^{-t/a}. \end{aligned}$$

★ Più in generale, i tassi forward per l'intervallo  $[s, u]$  sono

$$\begin{aligned} f(0, s, u) &= \frac{1}{u - s} \int_s^u f(0, v) dv \\ &= \beta_0 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{(u - s)/a} (e^{-s/a} - e^{-u/a}) \\ &\quad + \frac{\beta_2}{u - s} (se^{-s/a} - ue^{-u/a}). \end{aligned}$$

67

## ... NELSON-SIEGEL

▷ ★ Infine, i prezzi dei TCN (la 'discount function') sono

$$\begin{aligned} B(0, t) &= e^{-t r(0, t)} \\ &= e^{-t\beta_0 - (\beta_1 + \beta_2)a(1 - e^{-t/a}) + \beta_2 te^{-t/a}} \end{aligned}$$

▷ Osserviamo che, fissato  $a$ , i tassi (a pronti o a termine) dipendono da  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  in maniera lineare  $\Rightarrow$  regressione lineare può essere usata per stimare i parametri (con  $a$  fissato).

▷ Interpretazione dei parametri:

★  $f(0, t)$  è somma di tre componenti:

$$f(0, t) = c_1(t) + c_2(t) + c_3(t),$$

con

$$c_1(t) = \beta_0, \quad c_2(t) = \beta_1 e^{-t/a}, \quad c_3(t) = \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a}.$$

68

## ... NELSON-SIEGEL

▷ Riesce

- ★  $c_1$  è costante:  $\lim_{t \rightarrow 0} c_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = \beta_0$ ;
- ★  $c_2$  è monotona decrescente se  $\beta_1 > 0$ , crescente se  $\beta_1 < 0$ , (costante se  $\beta_1 = 0$ ).  
Inoltre  $\lim_{t \rightarrow 0} c_2(t) = c_2(0) = \beta_1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = 0$ .
- ★ Se  $\beta_2 = 0$ ,  $c_3(t)$  è costante. Se  $\beta_2 > 0$ ,  $c_3$  cresce fino a  $t^* = a$  e poi decresce ( $t^*$  è punto di massimo assoluto). Se invece  $\beta_2 < 0$ ,  $c_3$  decresce fino a  $t^*$  e poi è crescente ( $t^*$  punto di minimo assoluto). Inoltre riesce  $\lim_{t \rightarrow 0} c_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_3(t) = 0$ .

▷ Di conseguenza, si può interpretare

- ★  $c_1$  come componente di **lungo termine** (è l'unica che ha limite non nullo in  $\infty$ ),
- ★  $c_2$  come componente di **breve termine** (il limite in 0 è non nullo)
- ★ e  $c_3$  come componente di **medio periodo** (ha limite 0 sia in 0 che in  $\infty$ ).

69

## ... NELSON-SIEGEL

▷ Osserviamo ancora che

- ★ Il tasso istantaneo per una scadenza 'infinita' è

$$f(0, \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(0, t) = \beta_0.$$

- ★ Il tasso istantaneo a pronti ('spot rate') è

$$r(0) = f(0, 0) = r(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \beta_0 + \beta_1.$$

- ★ Il parametro  $a$  è un parametro di posizione: non cambia il 'tipo di andamento' della curva dei tassi, ma la 'comprime' (se  $a$  piccolo) o 'allunga' (se  $a$  grande) infatti, è  $f(0, t; a) = f(0, kt; ka)$ .

70

## ... NELSON-SIEGEL

▷ Per i tassi a pronti si osserva la stessa decomposizione che sussiste per i tassi a termine istantanei

★ riesce infatti

$$r(0, t) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-t/a}}{t/a} + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-t/a}}{t/a} - e^{-t/a} \right)$$

★ studiando le due funzioni  $h_1(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$  e  $h_2(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} - e^{-t}$  si vede che  $h_1(0+) = 1$ ,  $h_1(\infty) = 0$ ,  $h_1$  decrescente (infatti  $t^2 h_1'(t) = e^{-t}(t+1) - 1 < 0$ ), e  $h_2(0+) = 0$ ,  $h_2(\infty) = 0$ ,  $h_2$  prima crescente poi decrescente ( $t^2 h_2'(t) = e^{-t}(t^2 + t + 1) - 1 > 0$  per  $t < t^*$  e  $< 0$  per  $t > t^*$ , con  $1 < t^* < 2$ )

★ Per  $r(0, t)$  si possono fare le stesse osservazioni che per  $f(0, t)$ . In particolare  $r(0, \infty) = \beta_0$ ,  $r(0, 0) = r(0) = \beta_0 + \beta_1$ , e le forme di  $s \rightarrow r(t, s)$  possono essere costanti, monotone o campanulari.

71

## ... NELSON-SIEGEL

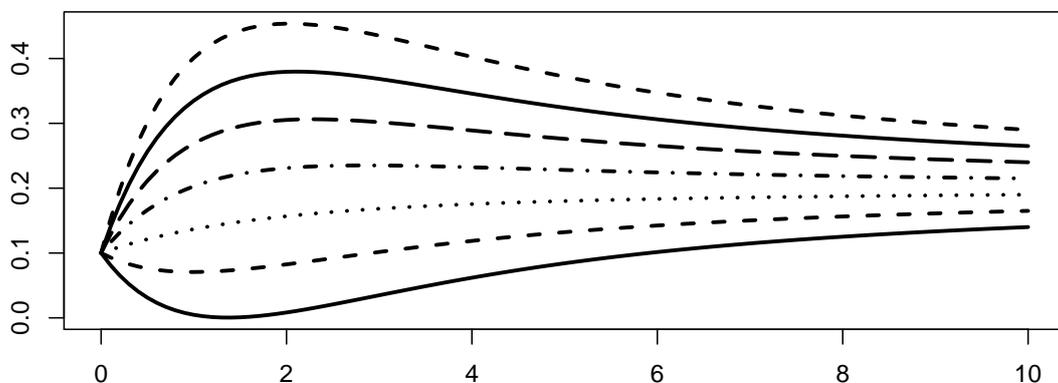


FIGURA:  $r(0, t)$ :  $a = 1$ ,  $\beta_0 = 0.2$ ,  $\beta_1 = -0.1$ ,  
 $\beta_2 = -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

72

## ... NELSON-SIEGEL

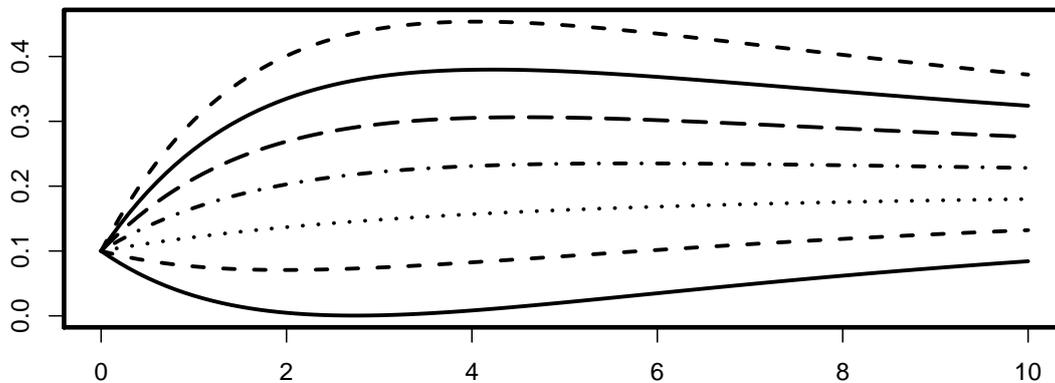


FIGURA:  $r(0, t)$ :  $a = 2$ ,  $\beta_0 = 0.2$ ,  $\beta_1 = -0.1$ ,  
 $\beta_2 = -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

73

## ... NELSON-SIEGEL

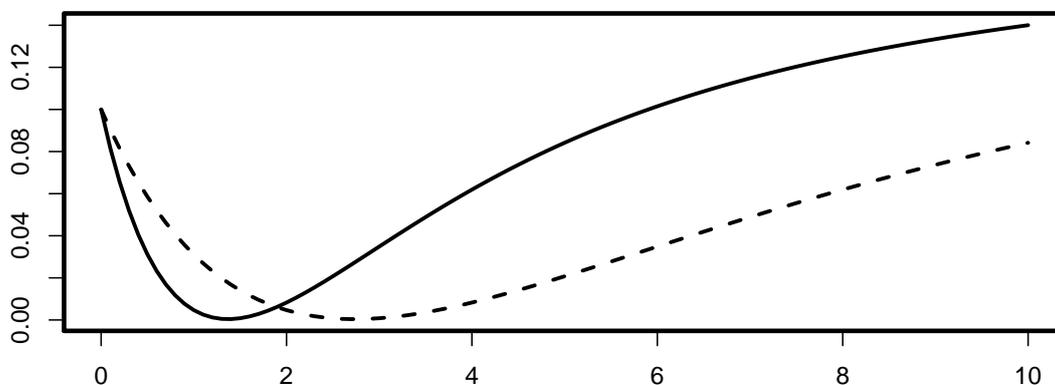


FIGURA:  $r(0, t)$ :  $a = 1, 2$ ,  $\beta_0 = 0.2$ ,  $\beta_1 = -0.1$ ,  $\beta_2 = -0.5$

74

## ... NELSON-SIEGEL

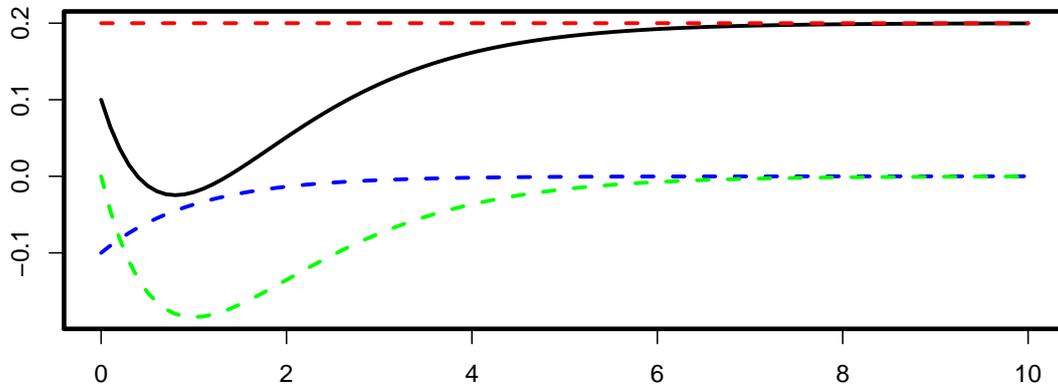


FIGURA:  $r(0, t)$ :  $a = 1, 2$ ,  $\beta_0 = 0.2$ ,  $\beta_1 = -0.1$ ,  $\beta_2 = -0.5$

75

## PROPRIETÀ EMPIRICHE DELLA CURVA DEI TASSI

- ▷ Le curve dei tassi che si osservano in pratica rientrano fra le seguenti forme:
  - ★ **piatta** (flat);
  - ★ **crescente** (normale);
  - ★ **decrescente** (invertita);
  - ★ **campanulare** (humped);
  - ★ **a S** o a cucchiaio.
- ▷ La famiglia di curve dei tassi del tipo Nelson-Siegel cattura le prime 4 forme.
- ▷ Al fine di riprodurre anche l'ultima forma, sono state proposte alcune estensioni di Nelson-Siegel, in particolare il modello di Svensson.

76

## VALORE DI UN FLUSSO DI CASSA

- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi ad un'epoca  $t \in \mathbb{T}$ , deriviamo il prezzo di un titolo che paga flussi pari a  $I_h \geq 0$  in  $t_h$ ,  $h = 1, \dots, n$ , con  $t < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Indicato con  $P$  tale prezzo, deve essere

$$P = \sum_{h=1}^n I_h B(t, t_h) = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t, t_h)(t_h - t)}.$$

- ▷ Infatti la strategia in cui acquisto in  $t$  la quantità  $I_h$  di TCN con scadenza  $t_h$  ( $h = 1, \dots, n$ ) produce gli stessi flussi di cassa del titolo in questione, quindi per la legge del prezzo unico il prezzo del titolo deve essere uguale al valore della strategia.
- ▷ Il valore del flusso dipende quindi **inversamente** da un certo numero di punti sulla curva dei tassi (**'fattori di rischio'**).

77

## YIELD TO MATURITY

- ▷ L'**Yield to Maturity** (YTM, Redemption Yield, Rendimento a Scadenza) è il **tasso interno di rendimento** (supposto esistente)  $r$  dell'operazione in cui si paga  $P$  in  $t$  e si riceve la sequenza di flussi  $I_h$  in  $t_h$ ,  $h = 1, \dots, n$ :

$$P = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t, t_h)(t_h - t)} = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t_h - t)}.$$

- ▷ Si tratta quindi di un valore che sintetizza (una 'media') i tassi  $r(t, t_h)$ ,  $h = 1, \dots, n$  e quindi verifica

$$\min_h r(t, t_h) \leq r \leq \max_h r(t, t_h).$$

- ▷ Per un TCN che scade in  $t_n = s$ , riesce  $r = r(t, s)$ .

78

## ... YIELD TO MATURITY

- ▷ Ipotesi sottostante l'YTM è che
  - ★ si detenga il titolo fino a scadenza.
  - ★ si possa reinvestire al tasso  $r$  fino all'ultima epoca ogni cash-flow ricevuto.

Infatti, dalla definizione di YTM si deduce che

$$Pe^{r(t_n-t)} = \sum_{h=1}^n I_h e^{r(t_n-t_h)}.$$

- ▷ Difetto del YTM è quindi l'assumere una **struttura per scadenza piatta** dei tassi e trascurare di conseguenza il rischio di reinvestimento.
- ▷ Tuttavia l'YTM è comunemente usato come misura del rendimento di un'obbligazione.
- ▷ Se si ragiona in termini di tassi invece che di intensità, indicato con  $i$  il tasso interno di rendimento, la relazione è  $i = e^r - 1$ .

79

## ... COUPON BOND

- ▷ Nel caso di un coupon bond, sia  $I_h = I$  per  $h = 1, \dots, n-1$  e  $I_n = I + C$ , dove  $I$  è la cedola e  $C$  il nominale; inoltre sia  $t_h = t + h\Delta$  per  $h = 1, \dots, n$ .
- ▷ Il coupon bond **quota alla pari** (sotto, sopra) se e solo se l'YTM (tasso su base periodale)  $i_\Delta = (1+i)^\Delta - 1$  coincide (è maggiore, minore) con il tasso cedolare  $I/C$ .
  - ★ Riesce infatti, ponendo  $v = (1+i)^{-\Delta} = (1+i_\Delta)^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} P &= I \sum_{h=1}^n (1+i)^{-h\Delta} + C(1+i)^{-n\Delta} \\ &= Iv \frac{1-v^n}{1-v} + Cv^n \\ &= (1-v^n) \left( I \frac{v}{1-v} - C \right) + C. \end{aligned}$$

- ★ Quindi  $P = C$  se e solo se  $I/C = (1-v)/v$  e quindi se e solo se  $i_\Delta = I/C$ .
- ▷ Ad esempio, un bond con cedole annuali pari a 3%, nominale 100 e scadenza 10 anni quota alla pari (sotto, sopra) se e solo se l'YTM è  $i = 3\%$  ( $>$ ,  $<$ ) ( $r = 2.96\%$ ).

80

## PAR RATE

- ▷ Si chiama **par rate** (par yield, tasso di parità) relativo ad una certa scadenza  $t_n$  e frequenza  $\Delta$  il tasso nominale  $c$  tale che la corrispondente obbligazione con nominale  $C = 100$ , che paga cedole  $I = c\Delta 100$  in  $t_h = t + h\Delta$ , quota alla pari.
- ▷ In altri termini il tasso cedolare  $c\Delta$  è il YTM su base periodale dell'obbligazione.
- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi, deve essere

$$100 = I \sum_{i=1}^n B(t, t_i) + 100B(t, t_n),$$

da cui si ricava

$$c \equiv c(t, n) = \frac{1 - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^n B(t, t_h)}.$$

- ▷ Per  $t \in \mathbb{T}$  fissato, la **struttura per scadenza dei par rate** è la funzione

$$n \rightarrow c(t, n); \quad n \geq 1.$$

81

Il suo grafico è la curva dei par rates.

## PAR RATE

- ▷ Riesce (ponendo  $t_0 = t$ )

★

$$\begin{aligned} c(t, n) &= \frac{1 - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^n B(t, t_h)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{B(t, t_j)}{\sum_{h=1}^n B(t, t_h)} \frac{B(t, t_{j-1}) - B(t, t_j)}{\Delta B(t, t_j)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{B(t, t_j)}{\sum_{h=1}^n B(t, t_h)} L_f(t, t_{j-1}, t_j). \end{aligned}$$

- ★ Quindi il par rate è una media dei tassi a termine semplici; è allora

$$\min_i L_f(t, t_{i-1}, t_i) \leq c(t, n) \leq \max_i L_f(t, t_{i-1}, t_i).$$

- ★ Inoltre, si ha

$$c(t, n+1) = \alpha c(t, n) + (1-\alpha)L_f(t, t_n, t_{n+1}), \quad \alpha = \frac{\sum_{h=1}^n B(t, t_h)}{\sum_{h=1}^{n+1} B(t, t_h)},$$

quindi se la struttura per scadenza dei par rates è crescente (decrescente) allora sono dominati dai (dominano i) tassi a

82

## ... YIELD TO MATURITY

- ▷ È comune ragionare in termini di prezzo di un titolo come funzione (decescente) dell'YTM:

$$P \equiv P(r) = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t_h-t)}.$$

- ▷ Come si comporta  $P$  al variare di  $r$ ?

★

$$P'(r) = - \sum_{h=1}^n I_h (t_h - t) e^{-r(t_h-t)} < 0$$

$$P''(r) = \sum_{h=1}^n I_h (t_h - t)^2 e^{-r(t_h-t)} > 0$$

- ★ Quindi  $P$  è funzione **decescente convessa** dell'YTM. Al crescere del YTM il prezzo decresce con tassi marginali decrescenti
- ★ Essendo  $P$  continua e  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) = 0$  e  $P(0) = \sum_h I_h$  si deduce che l'YTM esiste unico se  $0 < P < \sum_h I_h$ .

83

## ... YIELD TO MATURITY

- ▷ ★ La convessità implica che una variazione positiva dell'YTM comporta una variazione (negativa) del prezzo in valore assoluto minore della variazione (positiva) corrispondente ad un uguale variazione di segno negativo dell'YTM:

$$P(r) - P(r + \Delta r) < P(r - \Delta r) - P(r).$$

- ★ Dividendo per  $P(r)$ , lo stesso risultato si applica alle variazioni percentuali (variazioni/prezzo):

$$\frac{P(r) - P(r + \Delta r)}{P(r)} < \frac{P(r - \Delta r) - P(r)}{P(r)}.$$

84

## DURATION (MACAULAY, 1938)

- ▷ Per calcolare approssimativamente l'entità delle variazioni assolute e percentuali del prezzo si introducono le seguenti quantità: la DOLLAR DURATION,  $\$D$  e la DURATION  $D$ , definite da

$$\$D = -P'(r), \quad D = -\frac{P'(r)}{P(r)} = -(\log P(r))'$$

- ▷ La prima **approssima** la **variazione** di  $P$ , la seconda la sua **variazione percentuale**, quando il YTM varia di una quantità 'piccola'  $\Delta r$ :

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \cong P'(r)\Delta r = -\$D \Delta r,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{P(r)} \cong \frac{P'(r)\Delta r}{P(r)} = -D \Delta r$$

85

## ... DURATION

- ▷ La Duration può essere interpretata come **media temporale**:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{P'(r)}{P(r)} \\ &= \frac{\sum_{h=1}^n I_h(t_h - t)e^{-r(t_h - t)}}{P(r)} \\ &= \sum_{h=1}^n w_h(t_h - t), \end{aligned}$$

con  $w_h = I_h e^{-r(t_h - t)} / P(r)$ .

- ▷ Si tratta quindi della media delle vite a scadenza dei flussi pesate con i flussi scontati usando l'YTM.
- ▷ Riesce quindi

$$t_1 - t \leq D \leq t_n - t,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se c'è una sola scadenza. Quindi per un TCN la duration coincide con la vita a scadenza.

86

## CONVEXITY

- ▷ L'approssimazione 'del primo ordine' che si ottiene con la duration può essere migliorata considerando un termine di 'secondo ordine';
- ★ questo corrisponde ad approssimare con un polinomio di secondo grado (parabola) piuttosto che di primo grado (retta).
  - ★ Si ha allora

$$\Delta P(r) \cong -\$D \Delta r + \frac{1}{2} \$Conv (\Delta r)^2,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \cong -D \Delta r + \frac{1}{2} Conv (\Delta r)^2.$$

- ★  $Conv = P''(r)/P(r)$  è la CONVEXITY e  $\$Conv = P''(r)$  è la DOLLAR CONVEXITY.
- ▷ La convexity è il momento secondo (ponderato) delle vite a scadenza:

$$Conv = \sum_{h=1}^n w_h (t_h - t)^2.$$

87

## ... DURATION

- ▷ Se ragioniamo in termini di tasso  $i$  piuttosto che di intensità  $r$ , essendo il legame  $r = \log(1 + i)$ , possiamo introdurre la funzione

$$\bar{P}(i) = P(\log(1 + i)) = \sum_{h=1}^n I_h (1 + i)^{-(t_h - t)}.$$

- ▷ Riesce allora

★

$$\bar{P}'(i) = \frac{P'(\log(1 + i))}{1 + i} = -\frac{\$D}{1 + i}, \quad \frac{\bar{P}'(i)}{\bar{P}(i)} = -\frac{D}{1 + i} = -MD,$$

- ★ dove  $MD = \frac{D}{1+i}$  è la DURATION MODIFICATA.
- ★ Al fine di approssimare una variazione percentuale piccola  $\Delta i$  nel tasso, si utilizza

$$\frac{\Delta \bar{P}(i)}{\bar{P}(i)} \cong -MD \Delta i$$

- ▷ Al secondo ordine:  $\bar{P}''(i)/\bar{P}(i) = (Conv + D)/(1 + i)^2$ .

88

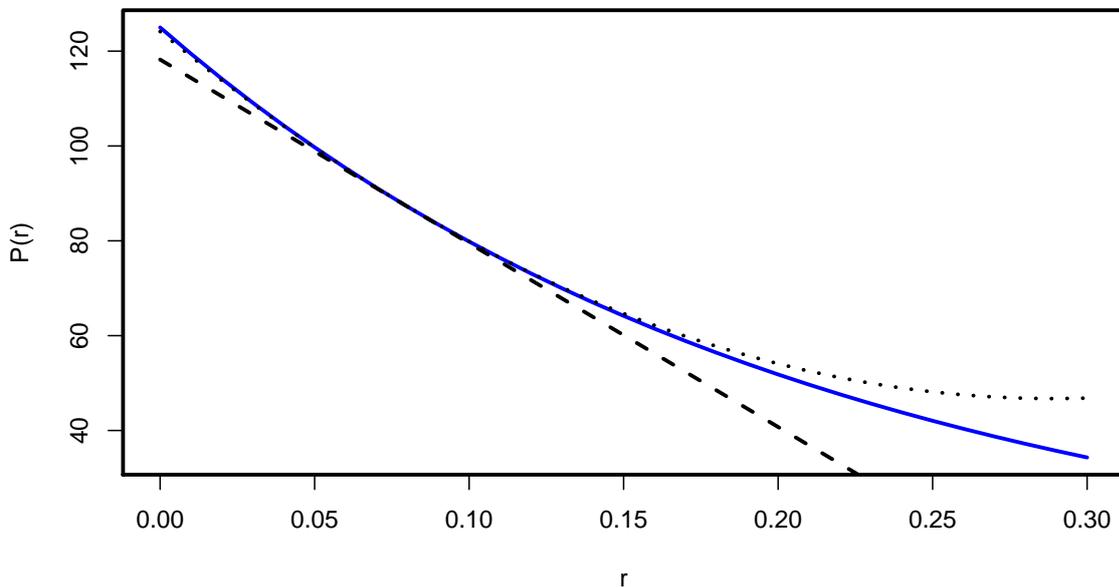
## ... DURATION

- ▷ Esempio: coupon bond, cedole semestrali, scadenza 5 anni, cedole 2.5%,  $P = 87.23$ , YTM  $r=8\%$  ( $i=8.33\%$ ,  $i_2=4.08\%$ ), duration e convexity  $D = 4.44$ ,  $Conv = 21.23$ .

$\Delta r$ (b.p.)	$\Delta P$	$\$D$	$\$D \& \$Conv$	$\Delta P/P$ (%)	$D$	$D \& Conv$
-400	17.08	15.49	16.98	19.58	17.76	19.46
-300	12.50	11.62	12.45	14.33	13.32	14.28
-200	8.13	7.75	8.12	9.32	8.88	9.31
-100	3.97	3.87	3.97	4.55	4.44	4.55
-80	3.16	3.10	3.16	3.62	3.55	3.62
-60	2.36	2.32	2.36	2.70	2.66	2.70
-40	1.56	1.55	1.56	1.79	1.78	1.79
-20	0.78	0.77	0.78	0.89	0.89	0.89
20	-0.77	-0.77	-0.77	-0.88	-0.89	-0.88
40	-1.53	-1.55	-1.53	-1.76	-1.78	-1.76
60	-2.29	-2.32	-2.29	-2.63	-2.66	-2.63
80	-3.04	-3.10	-3.04	-3.49	-3.55	-3.48
100	-3.78	-3.87	-3.78	-4.34	-4.44	-4.33
200	-7.39	-7.75	-7.38	-8.47	-8.88	-8.46
300	-10.83	-11.62	-10.79	-12.41	-13.32	-12.37
400	-14.11	-15.49	-14.01	-16.17	-17.76	-16.07

89

## ... DURATION



90

## DURATION DI UN COUPON BOND

- ▷ Nel caso specifico di un coupon bond, sia  $I_h = I$  per  $h = 1, \dots, n - 1$  e  $I_n = I + C$ , dove  $I$  è la cedola e  $C$  il nominale; inoltre sia  $t_h = t + h$  per  $h = 1, \dots, n$  (senza perdita di generalità abbiamo preso  $\Delta = 1$ , cioè cedole annuali).
- ▷ Riesce, posto  $v = e^{-r} = (1 + i)^{-1}$ ,

$$D = \frac{\frac{I}{C} \sum_{h=1}^n h v^h + n v^n}{\frac{I}{C} \sum_{h=1}^n v^h + v^n}.$$

- ▷ La duration è funzione decrescente del tasso cedolare  $I/C$ : al crescere della cedola diminuisce il peso del rimborso a scadenza

$$\frac{\partial D}{\partial(I/C)} = \frac{1}{(\dots)^2} v^n \sum_{h=1}^n (h - n) v^h < 0.$$

## ... DURATION DI UN COUPON BOND

- ▷ All'aumentare del numero di cedole, il comportamento della duration non è sempre monotono: è crescente se  $i \leq \frac{I}{C}$  (bond quota alla pari o sopra la pari), mentre è prima crescente poi decrescente se  $i > \frac{I}{C}$  (bond quota sotto la pari). Infatti, indicata con  $D_n$  la duration per il titolo con  $n$  cedole e  $P_n$  il prezzo corrispondente, è

$$P_{n+1} = P_n + I v^{n+1} - C v^n (1 - v),$$

$$D_{n+1} = \frac{D_n P_n + I(n+1)v^{n+1} - C n v^n (1 - v) + C v^{n+1}}{P_{n+1}}$$

## ... DURATION DI UN COUPON BOND

▷ Quindi riesce

$$D_{n+1} - D_n = \frac{Cv^n}{P_{n+1}} [(n - D_n)(\alpha - 1) + \alpha]$$

con  $\alpha = \left(\frac{I}{C} + 1\right)v > 0$ . Quindi se  $\alpha \geq 1$  (caso  $i \leq \frac{I}{C}$ ) è  $D_n$  crescente con  $n$ , se  $\alpha < 1$  è  $D_{n+1} > D_n$  se e solo se  $n < D_n + \frac{\alpha}{1-\alpha}$ .

93

## ... DURATION DI UN COUPON BOND

▷ In ogni caso  $D_n$  converge verso un valore limite; sfruttando le

$$\sum_{h=1}^n v^h = v \frac{1 - v^n}{1 - v}, \quad \sum_{h=1}^n hv^h = \frac{v}{1 - v} \left( \frac{1 - v^n}{1 - v} - nv^n \right),$$

si ottiene

$$D_n = \frac{nv^n \left(1 - \frac{I}{C} \frac{v}{1-v}\right) + \frac{I}{C} \frac{v}{1-v} \frac{1-v^n}{1-v}}{\frac{I}{C} \frac{v}{1-v} (1 - v^n) + v^n}$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \frac{1 + i}{i},$$

che è la duration di una rendita perpetua.

94

## ... DURATION DI UN COUPON BOND

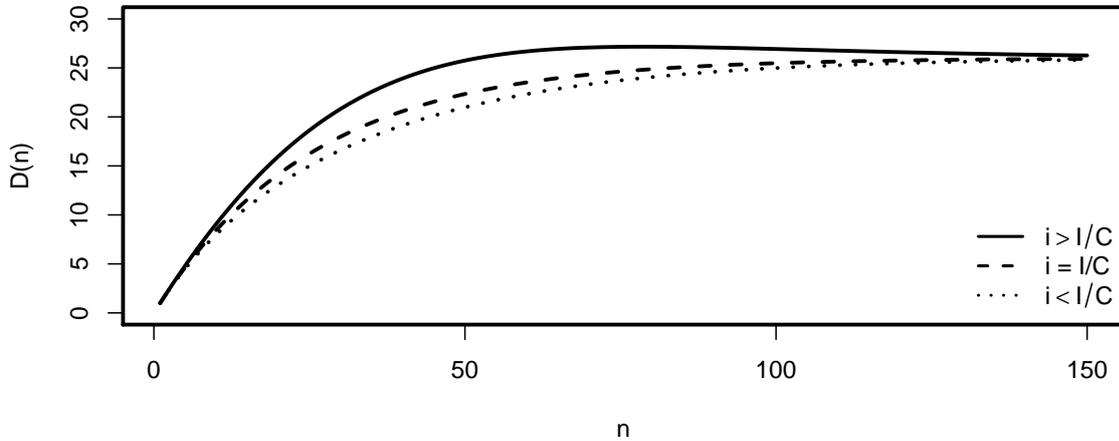


FIGURA:  $C = 100$ ,  $i = 4\%$ ,  $I = 2, 4, 6$ .

95

## ... DURATION DI UN COUPON BOND

- ▷ La duration di un coupon bond è funzione decrescente del tasso di rendimento  $r$  (o  $i$ ).
- ▷ Riesce infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial r} \left( \frac{I}{C} \sum_{h=1}^n v^h + v^n \right)^2 &= - \left( \frac{I}{C} \right)^2 \sum_{h>j}^{h,j=1\dots n} v^{h+j} (j-h)^2 \\ &\quad - \left( \frac{I}{C} \right) v^n \sum_{h=1}^n v^h (n-h)^2 < 0 \end{aligned}$$

- ▷ Le variazioni percentuali del prezzo decrescono con il tasso interno di rendimento.