

# Teoria dei giochi

Mariangela Scorrano, PhD

12 Maggio 2017

## Cos'è la teoria dei giochi?

La teoria dei giochi ha lo scopo di descrivere la scelta razionale dei giocatori (individui, famiglie, gruppi, ...) in situazioni caratterizzate da **interazione strategica**, cioè situazioni nelle quali il comportamento di un giocatore può modificare il comportamento e/o il benessere di un altro giocatore.

In teoria dei giochi, il termine scelta razionale si basa su due caratteristiche che contraddistinguono i giocatori: l'*intelligenza* e la *razionalità*.

- Un giocatore è **razionale** se cerca di individuare, tra le azioni a sua disposizione, l'azione o le azioni che gli assicurano il risultato migliore
- Un giocatore è **intelligente** se possiede le capacità logiche che gli permettono di individuare senza mai compiere errori l'azione o le azioni, tra quelle a sua disposizione, che gli assicurano il risultato migliore, date le sue preferenze sulle conseguenze.

Il **problema di scelta razionale** richiede che il soggetto:

- sia in grado di determinare l'insieme di scelta, cioè l'insieme delle azioni tra le quali può e deve selezionare l'azione da compiere;
- sia in grado di individuare una relazione che lega le azioni alle conseguenze delle azioni stesse;
- sia in grado di ordinare tutte le possibili conseguenze (dalla migliore alla peggiore);
- sia in grado di selezionare l'azione "migliore"

Tradizionalmente, il processo di scelta razionale può avere luogo in tre diversi contesti:

- scelta in condizioni di **certezza**: ad ogni azione è associata una ed una sola conseguenza. Data una funzione di utilità che rappresenta le preferenze sulle conseguenze, il problema di determinare l'azione migliore tra quelle disponibili si riduce al problema di individuare, tra le conseguenze ottenibili, quella alla quale è associato il valore di utilità più elevato: la scelta razionale di un individuo in condizioni di certezza richiede di massimizzare la sua utilità.
- scelta in presenza di **incertezza**: ad ogni azione sono associate più conseguenze, in base a una distribuzione di probabilità esogenamente data. Se questa probabilità è "oggettiva" si parla di problema di scelta in condizioni di *rischio*; se invece è "soggettiva" si parla di problema di scelta in condizioni di *incertezza*. Questi due tipi di problemi di scelta vengono studiati dalla teoria delle decisioni.

- scelta in presenza di **interazione strategica**: ad ogni azione sono generalmente associate più conseguenze, ma ciò non dipende da stati del mondo esogenamente dati, ma dalle scelte effettuate da altri individui razionali.

- scelta in presenza di **interazione strategica**: ad ogni azione sono generalmente associate più conseguenze, ma ciò non dipende da stati del mondo esogenamente dati, ma dalle scelte effettuate da altri individui razionali.

I giochi propriamente detti, come gli Scacchi, il Poker, il Bridge, costituiscono esempi paradigmatici di situazioni decisionali interattive. Ma lo stesso può dirsi per una miriade di situazioni economiche, politiche e sociali: concorrenza e collusione tra imprese, aste, gare d'appalto, interazione tra scelte di politica economica di un governo e scelte dei consumatori, lavoratori e imprese, determinazione delle politiche economiche (monetarie, fiscali, commerciali) da parte di più stati sovrani, conflitti militari...

Nel caso del monopolio non si ha una situazione di interazione strategica: l'impresa monopolistica, per definizione, è l'unica sul mercato dal lato dell'offerta, per cui, data la tecnologia e la domanda, il profitto dipende solo dalle sue decisioni di produzione. E nemmeno l'impresa che opera in concorrenza perfetta si trova in una situazione di interazione strategica: infatti essa non fa il prezzo e il suo profitto dipende solo dalla quantità che decide di produrre, indipendentemente da quanto fanno le altre imprese.

È nei mercati oligopolistici che le imprese si trovano tipicamente in una situazione di interazione strategica: in questi mercati, la quantità o il prezzo ottimali per una impresa dipendono sempre dalle quantità e dal prezzo scelto dalle altre imprese.



Un gioco è caratterizzato da quattro elementi:

- **i giocatori**
- **le azioni**, cioè l'insieme delle mosse a disposizione dei giocatori
- **le strategie**, cioè l'insieme dei possibili piani di azione: una strategia specifica un'azione per ognuna delle situazioni in cui il giocatore può essere chiamato a decidere (indipendentemente dal fatto che poi venga effettivamente a trovarsi in quella situazione)
- **i payoff** (o le vincite), cioè l'insieme degli esiti del gioco per ciascun giocatore

# Il dilemma del prigioniero

Due criminali che hanno commesso una grave rapina sono stati arrestati e sono detenuti in celle separate (in modo che non possono comunicare). Ci sono le prove per accusarli di un crimine lieve, la detenzione di armi, la cui pena è un anno di prigione. Ciascun prigioniero ha due possibili scelte: confessare (la rapina) o tacere. Quello dei due che confesserà la rapina accusando l'altro (mentre il complice tace) uscirà subito di carcere, mentre il complice verrà condannato a 20 anni di reclusione. Se dovessero confessare entrambi la comune partecipazione alla rapina verranno condannati a 5 anni di carcere ciascuno, godendo di uno sconto di pena per essersi pentiti. Nel caso infine in cui nessuno confessasse verrebbero puniti unicamente per il reato minore ed entrambi starebbero in cella solo un anno.

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:**

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali
- **le azioni:**

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali
- **le azioni:** confessare e negare

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali
- **le azioni:** confessare e negare
- **le strategie:**

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali
- **le azioni:** confessare e negare
- **le strategie:** confessare e negare



# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali
- **le azioni:** confessare e negare
- **le strategie:** confessare e negare
- **i payoff:**

# Il dilemma del prigioniero

Quali sono

- **i giocatori:** i due criminali
- **le azioni:** confessare e negare
- **le strategie:** confessare e negare
- **i payoff:** sono negativi e sono gli anni di reclusione corrispondenti a ciascuna delle interazioni possibili

Un gioco può essere descritto in due modi diversi:

- **in forma estesa**: la descrizione avviene mediante un albero. Essa mette in rilievo la tempistica del problema: chi muove prima e chi dopo, quali sono le azioni a disposizione di ogni giocatore in ciascun momento del gioco, e la storia che ha condotto un giocatore in un certo punto del gioco;
- **in forma strategica**: nel caso di due soli giocatori la descrizione assume la forma di una tabella. I giocatori scelgono simultaneamente la strategia da adottare prima che il gioco abbia inizio, tenendo conto di tutte le situazioni in cui potrebbero venire a trovarsi.

Un gioco può essere descritto in due modi diversi:

- **in forma estesa**: la descrizione avviene mediante un albero. Essa mette in rilievo la tempistica del problema: chi muove prima e chi dopo, quali sono le azioni a disposizione di ogni giocatore in ciascun momento del gioco, e la storia che ha condotto un giocatore in un certo punto del gioco;
- **in forma strategica**: nel caso di due soli giocatori la descrizione assume la forma di una tabella. I giocatori scelgono simultaneamente la strategia da adottare prima che il gioco abbia inizio, tenendo conto di tutte le situazioni in cui potrebbero venire a trovarsi.

# Descrizione di un gioco

La matrice dei payoff ha sulle righe tutte le strategie di un giocatore, sulle colonne quelle dell'altro. Le celle della matrice individuano tutti possibili esiti del gioco, derivanti da ogni incrocio delle varie strategie dei due giocatori. In ogni cella sono inserite le vincite di tutti e due i giocatori, sempre nello stesso ordine.

La **matrice dei payoff** ha sulle righe tutte le strategie di un giocatore, sulle colonne quelle dell'altro. Le celle della matrice individuano tutti possibili esiti del gioco, derivanti da ogni incrocio delle varie strategie dei due giocatori. In ogni cella sono inserite le vincite di entrambi i giocatori, sempre nello stesso ordine.

		Prigioniero 2	
		Confessare	Negare
Prigioniero 1	Confessare	(-5; -5)	(0; -20)
	Negare	(-20; 0)	(-1; -1)

Il primo numero di ciascuna cella è il pay-off del prigioniero 1, mentre il secondo numero è il pay-off del prigioniero 2.

Un gioco è:

- **statico** se i giocatori muovono una sola volta simultaneamente
- **dinamico** se i giocatori scelgono più volte oppure se scelgono in modo sequenziale, ossia dopo aver osservato la mossa di altri giocatori

Un gioco è:

- **ad informazione completa** se tutti i giocatori conoscono le mosse ad disposizione di tutti i giocatori e le possibili vincite di tutti i giocatori
- **ad informazione incompleta** se un (almeno) giocatore non conosce le vincite degli altri



# Risoluzione di un gioco

Una possibile soluzione è rappresentata dalle strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate. Si dice che, per un certo giocatore, una **strategia** è **strettamente dominata** se ne esiste un'altra che assicura al giocatore in esame un payoff più elevato, qualunque sia la strategia adottata dagli altri giocatori.

Un giocatore intelligente e razionale che conosca la struttura del gioco non giocherà mai una strategia strettamente dominata.

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Consideriamo il seguente gioco in forma strategica:

		<b>Giocatore II</b>	
		Sinistra	Destra
<b>Giocatore I</b>	Alto	(3; 2)	(2; 6)
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6; 5)	(1; 3)

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Consideriamo il seguente gioco in forma strategica:

		<b>Giocatore II</b>	
		Sinistra	Destra
<b>Giocatore I</b>	Alto	(3; 2)	(2; 6)
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6; 5)	(1; 3)

Consideriamo dapprima il giocatore I e confrontiamo due sue strategie, ad esempio "Alto" e "Centro". La risposta dipende da quello che il giocatore I crede che farà il giocatore II.

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Se II gioca "Sinistra" ...

		Giocatore II	
		Sinistra	Destra
Giocatore I	Alto	(3; 2)	(2; 6)
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6; 5)	(1; 3)

I preferirà strettamente "Centro"

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Se II gioca "Destra" ...

		Giocatore II	
		Sinistra	Destra
Giocatore I	Alto	(3; 2)	(2; 6)
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6; 5)	(1; 3)

I preferirà strettamente "Centro"

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Se II gioca "Destra" ...

		Giocatore II	
		Sinistra	Destra
Giocatore I	Alto	(3; 2)	(2; 6)
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6; 5)	(1; 3)

I preferirà strettamente "Centro"

⇒ qualunque cosa faccia il giocatore II, I preferisce sempre "Centro" rispetto ad "Alto"

⇒ la strategia "Alto" è strettamente dominata dalla strategia "Centro"; esiste infatti un'altra strategia ("Centro") che assicura un payoff più elevato, qualunque sia la strategia adottata dal giocatore II.

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Quando confrontiamo due strategie, non è sempre vero che una di esse è strettamente dominata dall'altra.

Consideriamo ad esempio le strategie "Centro" e "Basso" per il giocatore I.

		Giocatore II	
		Sinistra	Destra
Giocatore I	Alto	(3; 2)	(2; 6)
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6; 5)	(1; 3)

Se II gioca "Sinistra" I ottiene 4 giocando "Centro" e 6 giocando "Basso"  $\Rightarrow$  I preferirà strettamente "Basso"

Se II gioca "Destra" I ottiene 3 giocando "Centro" e 1 giocando "Basso"  $\Rightarrow$  I preferirà strettamente "Centro"

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Se ipotizziamo che la struttura del gioco e l'intelligenza e la razionalità dei giocatori siano conoscenza comune, la strategia "Alto" può essere tranquillamente eliminata dal problema di scelta razionale, in quanto è conoscenza comune che non verrà giocata.

		<b>Giocatore II</b>	
		Sinistra	Destra
<b>Giocatore I</b>	<del>Alto</del>	<del>(3, 2)</del>	<del>(2, 6)</del>
	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6;5)	(1;3)



# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Eliminata la strategia “Alto” per il giocatore I, il gioco diventa:

		Giocatore II	
		Sinistra	Destra
Giocatore I	Centro	(4; 4)	(3; 3)
	Basso	(6;5)	(1;3)

Ora il giocatore II ha una strategia strettamente dominata.

Se I gioca “Centro” II ottiene 4 giocando “Sinistra” e 3 giocando “Destra”  $\Rightarrow$  I preferirà strettamente “Sinistra”

Se I gioca “Basso” II ottiene 5 giocando “Sinistra” e 3 giocando “Destra”  $\Rightarrow$  I preferirà strettamente “Sinistra”

$\Rightarrow$  qualunque sia la strategia adottata dal giocatore I, il giocatore II preferirà sempre “Sinistra” rispetto a “Destra”

$\Rightarrow$  la strategia “Destra” è una strategia strettamente dominata per il giocatore II.

# Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

La strategia “Destra” da parte del giocatore II può essere eliminata dal gioco. La nuova versione del gioco sarà quindi:

		Giocatore II	
		Sinistra	
Giocatore I	Centro	(4; 4)	
	Basso	(6;5)	

In questo gioco la strategia “ Centro” per il giocatore I è strettamente dominata dalla strategia “Basso”, in quanto  $4 < 6$ .  
Eliminata anche la strategia “ Centro” si ottiene:

		Giocatore II	
		Sinistra	
Giocatore I	Basso	(6;5)	

Dato un gioco in forma strategica:

- si individua una strategia strettamente dominata
- si elimina tale strategia e, di conseguenza, tutti i payoff associati all'utilizzo di quella strategia
- si scrive la nuova forma strategica del gioco
- si ripete il procedimento fino a quando per tutti i giocatori non esistono più strategie strettamente dominate

# Equilibrio di Nash

Data la strategia adottata dagli altri giocatori, una **risposta ottima** per un certo giocatore è una strategia che massimizza il suo payoff. Un **equilibrio di Nash** (o equilibrio strategico) è un insieme di strategie, una per giocatore, tale che ogni giocatore gioca una risposta ottima alle strategie adottate dagli altri giocatori.

In altre parole, un insieme di strategie è un equilibrio di Nash se nessun giocatore ha incentivo a deviare unilateralmente (cioè a giocare una strategia diversa) data la strategia scelta dagli avversari.

Procedimento: sottolineare il massimo di ogni colonna per il giocatore I e il massimo di ogni riga per il giocatore II e vedere le caselle nelle quali i payoff di entrambi i giocatori sono sottolineati.

# Equilibrio di Nash

Vediamo come si individua un equilibrio di Nash, usando come esempio il dilemma del prigioniero.

		Prigioniero 2	
		Confessare	Negare
Prigioniero 1	Confessare	(-5; -5)	(0; -20)
	Negare	(-20; 0)	(-1; -1)

- Se il prigioniero 2 sceglie di confessare, il prigioniero 1 preferisce confessare, in quanto se confessa ottiene -5, mentre se non confessa -20
- Se invece il secondo prigioniero nega, confessare dà un payoff al prigioniero 1 pari a 0, mentre negare dà -1

Un ragionamento simmetrico vale anche per il prigioniero 2: confessare è la sua strategia migliore sia che il prigioniero 1 confessi sia che taccia.

# Equilibrio di Nash

Vediamo come si individua un equilibrio di Nash, usando come esempio il dilemma del prigioniero.

		Prigioniero 2	
		Confessare	Negare
Prigioniero 1	Confessare	$(\underline{-5}; \underline{-5})$	$(\underline{0}; -20)$
	Negare	$(-20; \underline{0})$	$(-1; -1)$

L'unico equilibrio del dilemma del prigioniero è dunque (confessare, confessare).

Si noti peraltro che l'equilibrio di Nash nel gioco del dilemma del prigioniero rappresenta un esito non ottimale in assoluto per entrambi i giocatori: se infatti avessero potuto comunicare e sapere cosa l'altro stava facendo (ma allora il gioco sarebbe stato diverso) avrebbero scelto di non confessare, in quanto ciò avrebbe comportato un payoff maggiore per entrambi.

# Equilibrio di Nash ed eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate

Se la procedura di eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate conduce ad una sola soluzione, essa rappresenta necessariamente anche l'unico equilibrio di Nash del gioco.

Ma questi due principali concetti di soluzione non conducono necessariamente agli stessi risultati: possono esserci giochi caratterizzati dalla presenza di un unico equilibrio di Nash nei quali l'eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate non produce invece alcun effetto.

O ancora possono esistere giochi caratterizzati dalla presenza di una molteplicità (o di nessun) di equilibri di Nash.

# Gioco: “Battaglia dei sessi”

Due coniugi devono decidere (simultaneamente e indipendentemente) come passare la serata. Entrambi vorrebbero andare nello stesso locale. Tuttavia, hanno preferenze opposte: la moglie preferisce il balletto, mentre il marito preferisce il film. La forma strategica del gioco è:

		Marito	
		Balletto	Film
Moglie	Balletto	( <u>3</u> ; <u>1</u> )	(0; 0)
	Film	(0; 0)	( <u>1</u> ; <u>3</u> )

Non esistono strategie strettamente dominate per nessuno dei due giocatori. Di conseguenza, ogni strategia per ogni giocatore è compatibile con l'ipotesi di conoscenza comune della struttura del gioco e dell'intelligenza e razionalità dei giocatori.

Il gioco ha due equilibri di Nash in strategie pure: (Balletto, Balletto) e (Film, Film).



Il problema nel gioco del Dilemma del Prigioniero riguarda l'**informazione** e la **comunicazione**.

Se i criminali fossero in contatto l'uno con l'altro e sapessero che l'altro non confessa, entrambi preferirebbero non confessare e ottenere così delle pene molto basse. (È un pubblico ministero saggio quello che mette i prigionieri in stanze separate per creare incertezza e sfiducia).

In modo simile, è molto più probabile che emerga la cooperazione nella formazione dei prezzi in oligopolio quando i manager delle imprese rivali si tengono informati l'un l'altro sui loro piani e attività e quando le transazioni di mercato sono sufficientemente semplici e frequenti da poter essere controllate facilmente.

Se è assente una completa comunicazione, le imprese sono informate in modo imperfetto sulle condizioni di mercato (quali la domanda e costi dei rivali) e le intenzioni dei rivali. Esse cercano di inferire entrambi dal passato e dai risultati di mercato e sanno che le loro azioni presenti e passate saranno interpretate dai rivali come segnali dei loro costi e delle loro intenzioni. Inoltre esiste il problema della fallibilità umana. I manager sbagliano nell'applicare le loro politiche di prezzo a specifiche situazioni, magari perché stimano in modo sbagliato gli spostamenti della domanda. Per i rivali questi errori possono essere interpretati come il passaggio ad una strategia aggressiva di prezzi bassi. Le imprese cercano strategie che siano robuste in questo ambiente incerto e che permettano loro di imparare dal passato senza aumentare la vulnerabilità ai rivali nel futuro.

Bisogna quindi cercare di capire come evolvono queste strategie e come interagiscono influenzando la performance di mercato. Negli anni recenti sono stati sviluppati molti modelli formali di teoria dei giochi basati sull'informazione imperfetta e su analisi multiperiodali.

Importanti intuizioni sono nate anche da esperimenti controllati e da simulazioni, studiando i problemi della formazione dei prezzi in oligopolio sulla base di matrici dei pay-off in un gioco.

Particolarmente significative sono state le simulazione condotte da Robert Axelrod, basate sul gioco del Dilemma del Prigioniero ripetuto nel tempo.

I giocatori sono imprese che possono scegliere tra “prezzo alto” e “prezzo basso” in ogni incontro con l'avversario.

Ogni partita è fatta di numerosi incontri (cioè mosse) in ognuno dei quali si ripete la stessa matrice dei payoff:

		Impresa 2	
		Prezzo alto	Prezzo basso
Impresa 1	Prezzo alto	(50;50)	(30; 60)
	Prezzo basso	(60; 30)	(40;40)

I giocatori devono decidere un piano d'azione, cioè come muovere ogni volta, tenendo conto del comportamento (mossa) dell'avversario attuato precedentemente.

Essi giocano ciascuno una serie di partite, una contro ognuno degli altri giocatori, compreso un avversario che attua la propria stessa identica strategia.

Ogni partita è vinta da chi accumula il payoff più alto, ma l'importante è vincere il torneo, cioè accumulare la più alta vincita nell'insieme di tutte le partite.

Il problema teorico consiste quindi nel mettere alla prova le diverse strategie per vedere quale di esse accumuli il maggior payoff totale nell'intero torneo.

Si è visto che il programma che vince il torneo è la strategia “occhio per occhio”, che consiste nel cooperare nella prima mossa e poi nelle mosse successive fare qualsiasi cosa l'avversario abbia fatto nella mossa precedente. L'essenza della strategia “occhio per occhio” è che incoraggia la cooperazione minimizzando la vulnerabilità alla defezione (non cooperazione).

La strategia “occhio per occhio” ha le seguenti caratteristiche:

- è generosa, in quanto offre per prima una strategia cooperativa;
- è reattiva, in quanto risponde alle defezioni dei rivali appena possibile;
- è disposta al perdono, in quanto si adegua immediatamente al ritorno di un rivale alla strategia cooperativa.