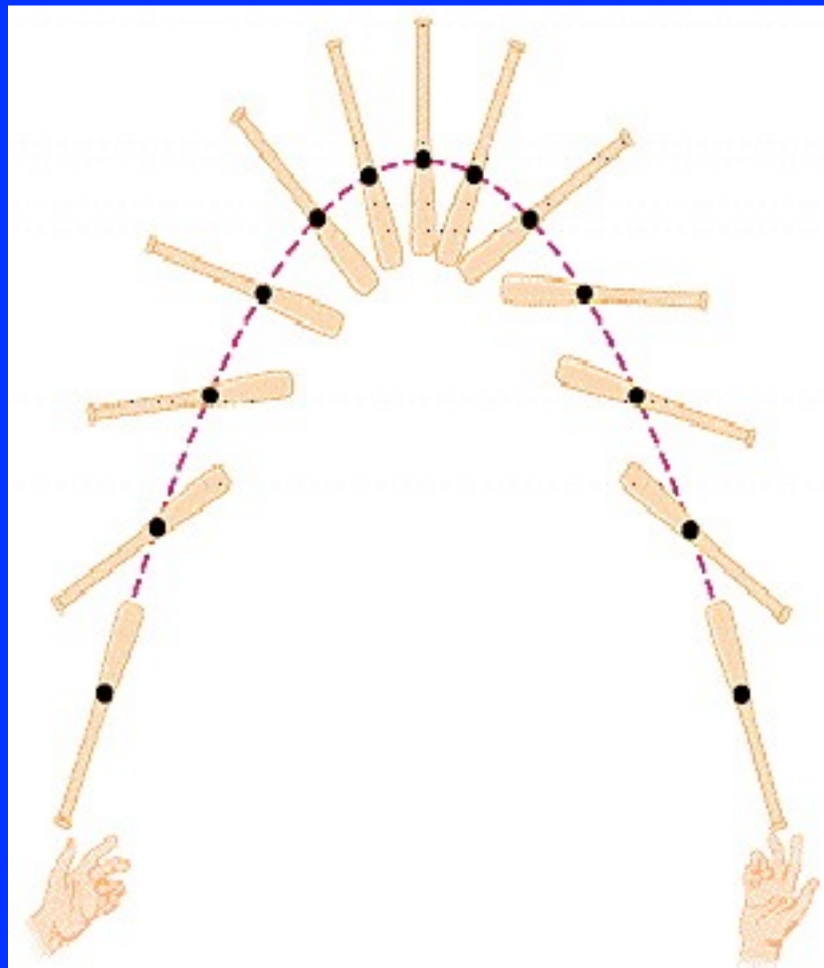
Lezione 7 - Sistemi di punti materiali

illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano



- Il moto di oggetti estesi spesso appare assai complicato
- Se tuttavia si immagina che tali corpi siano costituiti da un *insieme di tanti punti materiali* si possono individuare delle regolarità che consentono di studiare il moto in maniera relativamente semplice

lancio martello

Centro di massa

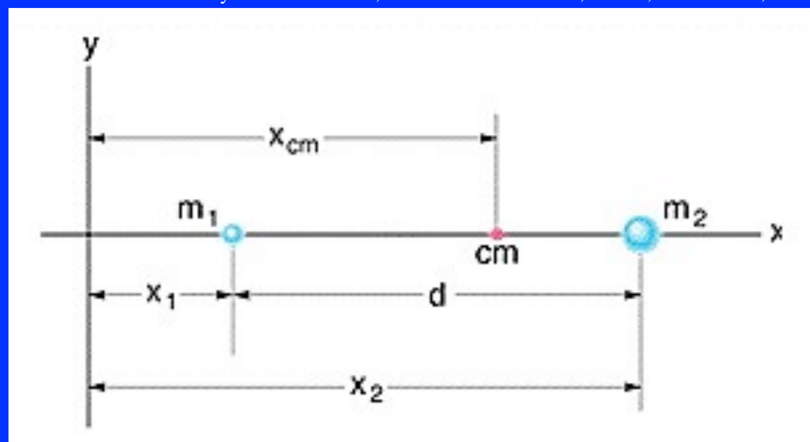
- Il centro di massa di un corpo, o di un sistema di corpi (punti materiali) è un punto che si muove, secondo le leggi di Newton, come se tutta la massa fosse concentrata in quel punto e tutte le forze esterne fossero applicate ad esso

$$x_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano



$$x_{cdm} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Centro di massa II

- In forma vettoriale, la definizione di centro di massa si scrive:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i = x_{cdm}\hat{\mathbf{i}} + y_{cdm}\hat{\mathbf{j}} + x_{cdm}\hat{\mathbf{z}}$$

- Se, invece di un sistema di punti materiali, si ha a che fare con un corpo esteso, bisogna identificare i punti *con elementi infinitesimi di massa* e scrivere

$$x_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \int_{\substack{tutto \\ il\ \ corpo}} xdm\ ; \qquad y_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \int_{\substack{tutto \\ il\ \ corpo}} ydm\ ; \qquad z_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \int_{\substack{tutto \\ il\ \ corpo}} zdm$$

- Spesso gli oggetti posseggono *proprietà di simmetria* che semplificano molto il calcolo del centro di massa

Dinamica del centro di massa

- L'equazione qui sotto fa capire immediatamente l'importanza del centro di massa:

$$\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_{esterne} = M_{tot}\vec{\mathbf{a}}_{cdm}}$$

(per un sistema di punti materiali)

essa stabilisce che il centro di massa obbedisce alla seconda legge di Newton come un qualsiasi punto materiale

- Questa legge si chiama anche ***prima equazione cardinale della meccanica***
- Notare che in assenza di forze esterne, risulta che $\mathbf{a}_{cdm}$ è sempre zero, quindi il *cdm* si muove di moto rettilineo uniforme, indipendentemente da quello che fanno i singoli componenti del sistema di punti

sistema osc.

lancio martello

Dimostrazione della I equazione cardinale

- Si parte dalla definizione di centro di massa

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_{cdm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i \Rightarrow M_{tot} \vec{\mathbf{r}}_{cdm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}$$

- Derivando ambo i membri rispetto al tempo due volte si ha

(1) $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(M_{tot} \vec{\mathbf{r}}_{cdm}\right) = M_{tot} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}}_{cdm} = M_{tot} \vec{\mathbf{v}}_{cdm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}$$

(2) $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(M_{tot} \vec{\mathbf{v}}_{cdm}\right) = M_{tot} \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}}_{cdm} = M_{tot} \vec{\mathbf{a}}_{cdm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i}$$

- Si applica infine la II legge di Newton al singolo punto:

$$\boxed{M_{tot} \vec{\mathbf{a}}_{cdm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i} \rightarrow \boxed{M_{tot} \vec{\mathbf{a}}_{cdm} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i = \sum \vec{\mathbf{F}}_{interne} + \sum \vec{\mathbf{F}}_{esterne}}$$

per la III legge di Newton $\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_{interne} = 0} \rightarrow \boxed{M_{tot} \vec{\mathbf{a}}_{cdm} = \sum \vec{\mathbf{F}}_{esterne}}$

Quantità di moto

- Spesso è comodo ragionare in termini di quantità di moto (o momento)

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}}$$

(per un singolo punto materiale)

- Newton formulò originariamente la sua II legge usando la quantità di moto:

$$\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}}$$

Infatti:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d}{dt}m\vec{\mathbf{v}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}$$

(vale per sistemi in cui m è costante)

- E' immediato definire la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali:

$$\boxed{\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{n} m\vec{\mathbf{v}}_i} \Longrightarrow \boxed{\vec{\mathbf{P}} = M_{tot}\vec{\mathbf{v}}_{cdm}}$$

Tabella di riepilogo

Legge o Definizione	Singolo punto	Sistema di punti
II legge di Newton	$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$	$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = m\vec{\mathbf{a}}_{cdm}$
Quantità di moto	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$	$\vec{\mathbf{P}} = M_{tot}\vec{\mathbf{v}}_{cdm}$
II legge (con il momento)	$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$	$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}$
Teorema dell'energia cin.	$L_{tot} = \Delta K$	$L_{tot} = \Delta K$

Conservazione della quantità di moto

- Se un sistema e isolato (cioè non interagisce con il resto dell'universo) allora la somma delle forze esterne agenti su di esso è nulla
- Dalla II equazione cardinale si deduce:

$$\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_{est} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = 0} \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{P}} = costante} \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{P}}_{finale} = \vec{\mathbf{P}}_{iniziale}}$$

- Le ultime tre equazioni a destra esprimono il principio di conservazione della quantità di moto

urto a 4

- Notare che se solo una certa componente (lungo un dato asse) della risultante della forza esterna è nulla, allora solo la corrispondente componente della quantità di moto totale resta costante

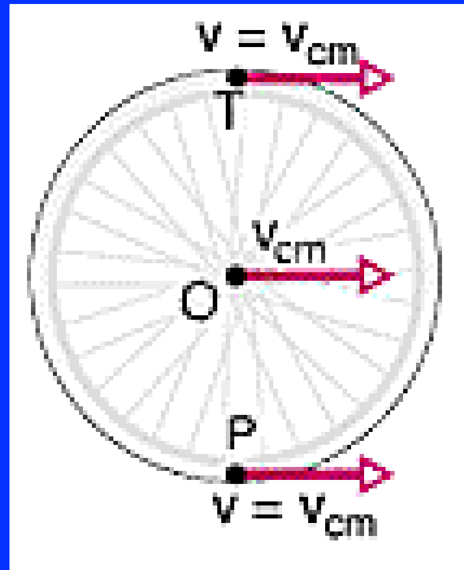
conservo solo Px

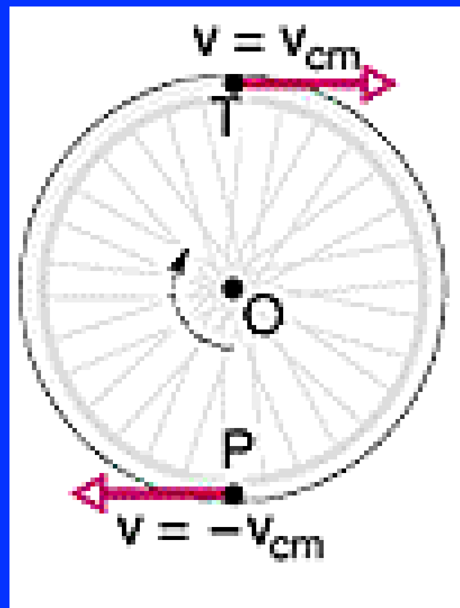
Traslazioni e rotazioni

- Finora abbiamo parlato sempre di **corpi puntiformi** e ne abbiamo descritto il moto usando le leggi di Newton: si tratta di un **moto puramente traslatorio**
- Quando si vogliono studiare ***corpi estesi*** bisogna tenere conto del fatto che detti corpi, oltre a traslare, ***possono anche ruotare***

Moto traslatorio e moto rotatorio

- Moto traslatorio
  - tutti i punti del corpo hanno hanno la medesima velocità





illustrazioni tratte da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

- Moto rotatorio
  - i vari punti del corpo hanno velocità diverse

Forze e momenti delle forze

- I moti traslatori possono essere “associati” anche and una sola forza attraverso

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

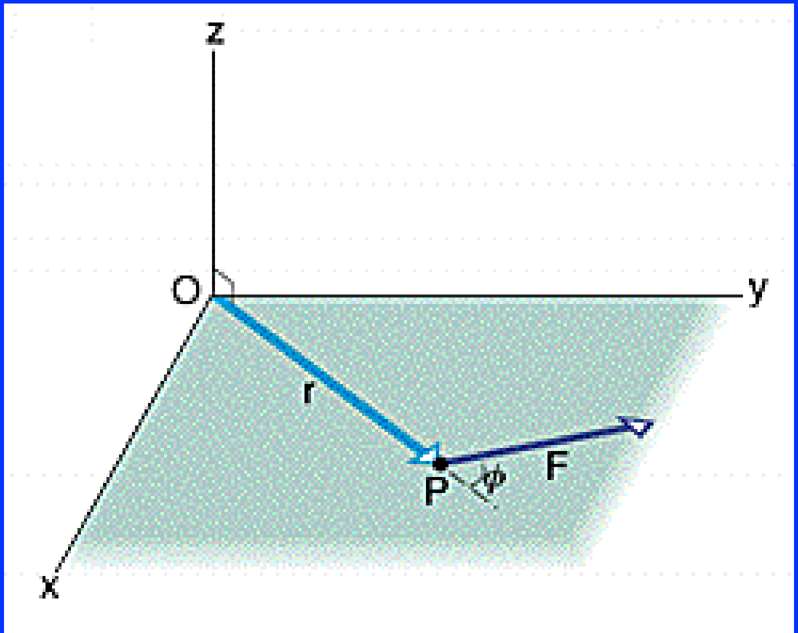
- Per generare un moto rotatorio è necessario avere almeno un coppia di forze applicate in punti diversi del corpo esteso

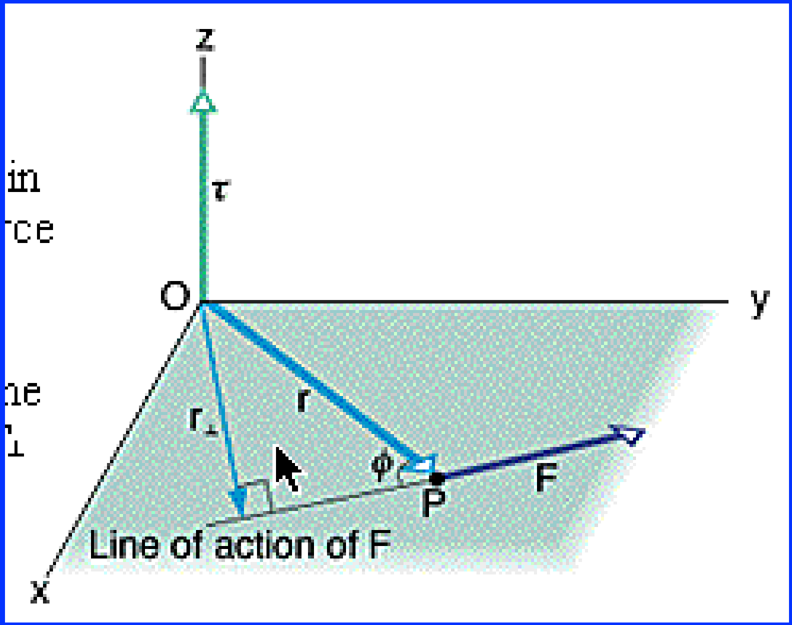
  (o anche una forza ed un punto fisso)

- Una coppia di forze genera un ***momento***

Momento di una forza

- Se si immagina di avere un punto di un corpo fissato in qualche modo ed una forza applicata ad un altro punto del corpo si può definire il ***momento della forza***





illustrazioni tratte da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

Momento di una forza II

- Il momento di una forza è un vettore definito da

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Si può pensare che un momento applicato ad un certo corpo generi una rotazione avente per il momento stesso e direzione di rotazione data dalla **“regola della mano destra”**

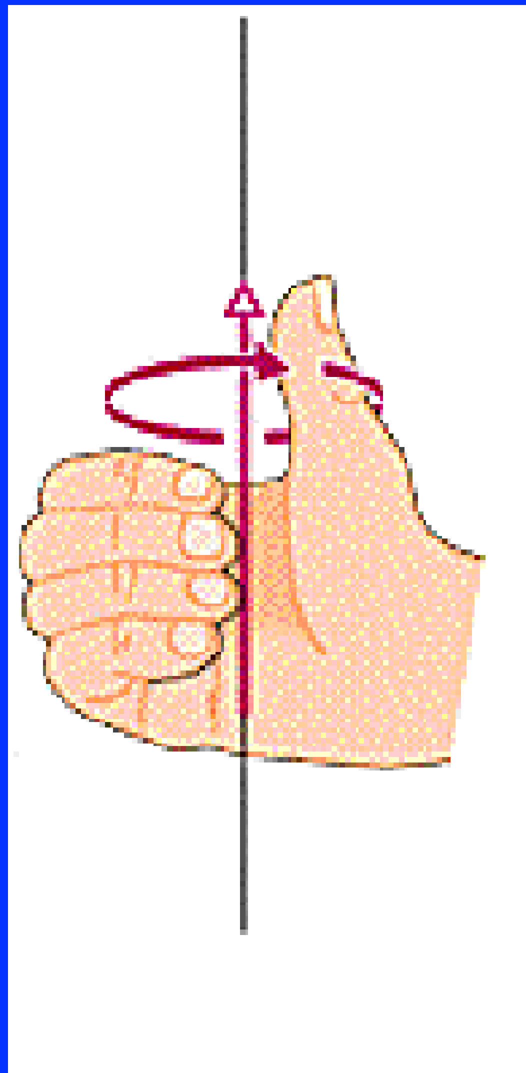


illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,”Fondamenti di Fisica”, IV Ed., Ambrosiana, Milano