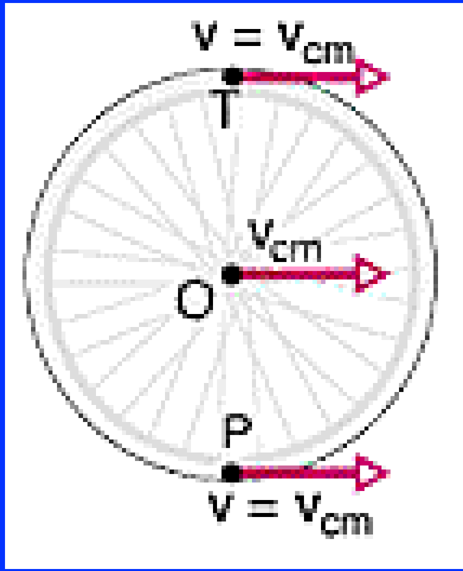
Lezione 8 - Equilibrio statico

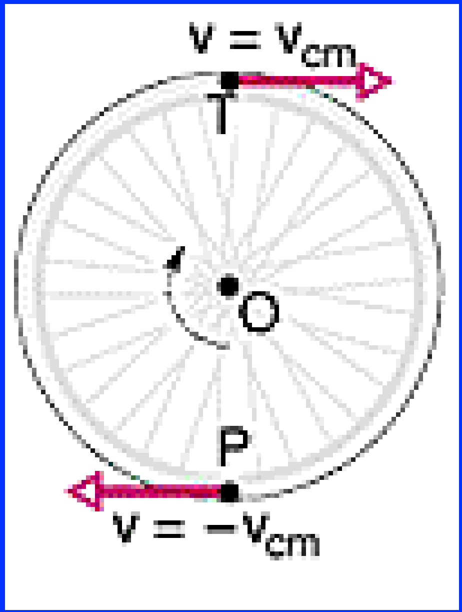
- Abbiamo tutti una nozione intuitiva del significato della parola equilibrio
- Ci occupiamo ora di dare una definizione più precisa e quantitativa dello "stato di equilibrio statico" di un corpo
- **Diremo che un corpo è in equilibrio statico quando la somma di tutte le forze e la somma di tutti i momenti agenti su di esso sono nulle**

Moto traslatorio e moto rotatorio

- Moto traslatorio
  - tutti i punti del corpo hanno hanno la medesima velocità



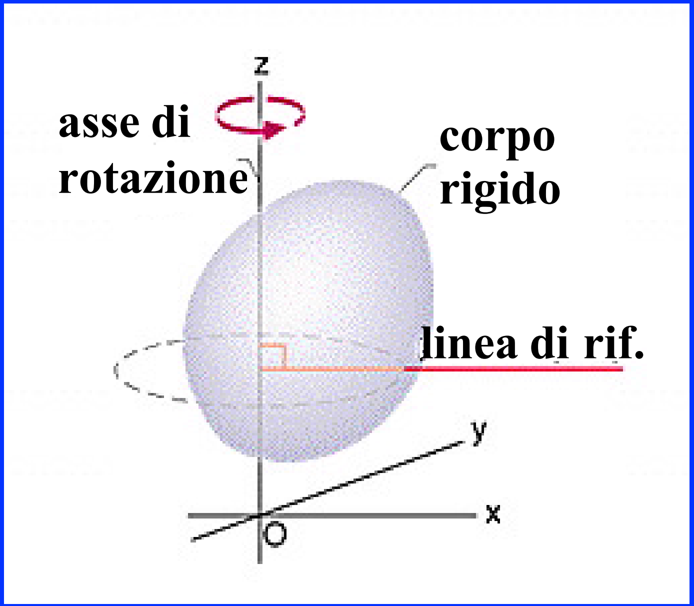
- Moto rotatorio
  - i vari punti del corpo hanno velocità diverse

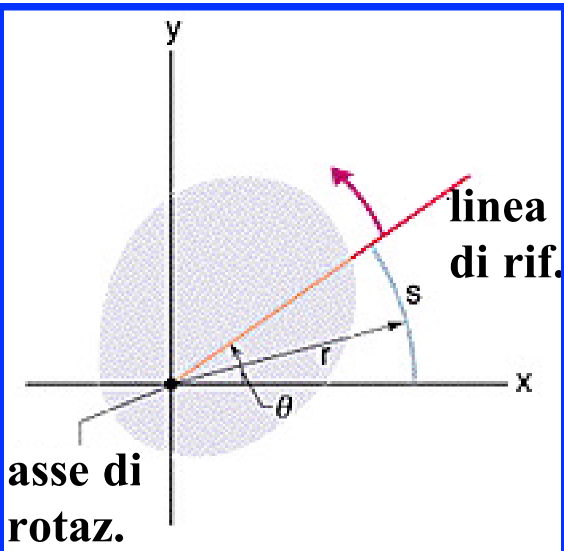


Variabili rotazionali

- Quando si studiano i moti rotatori gli angoli prendono il posto che hanno le distanze nei moti traslatori
- Vediamo più in dettaglio il significato delle variabili angolari nel caso di un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso:
  - la posizione angolare è descritta da un angolo θ (misurato in radianti) che varia con il tempo:

$$\boxed{\theta(t) = s/r}$$





vista in sezione

Variabili rotazionali II

- Abbiamo allora
  - spostamento angolare

$$\boxed{\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(t_1)}$$

ricordiamo che
1 angolo giro = 360 gradi = 2π radianti

  - velocità angolare

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$ media

$$\boxed{\omega = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$$ istantanea

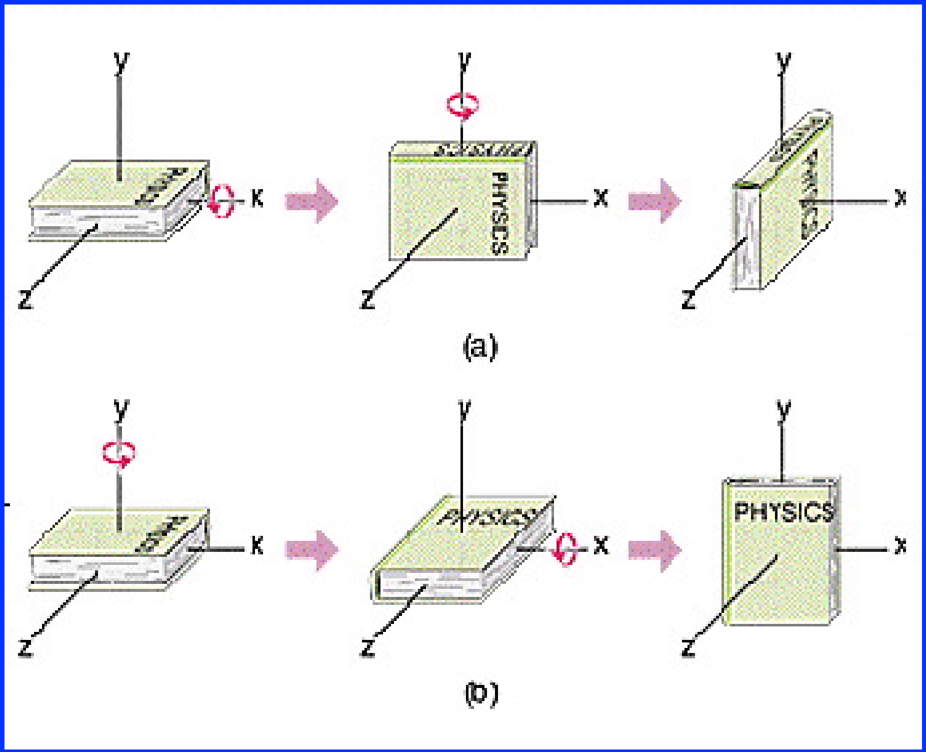
  - accelerazione angolare

$$\boxed{\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$ media

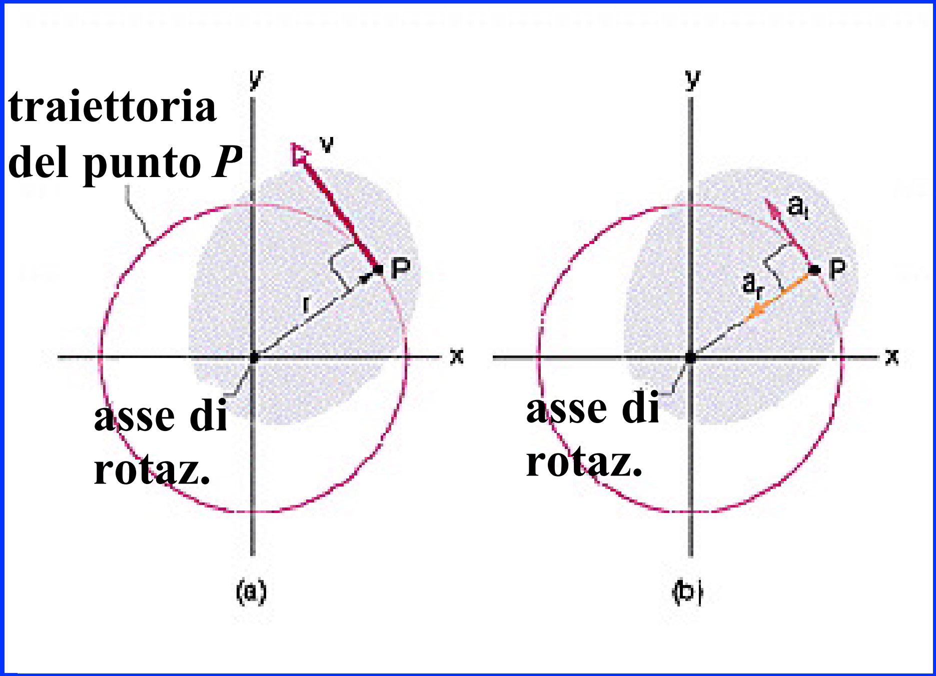
$$\boxed{\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}}$$ istantanea

Sequenze di rotazioni

- Quando si ragiona sulle rotazioni bisogna porre attenzione al fatto che l'ordine in cui si esegue una sequenza di più rotazioni è importante



Relazioni tra variabili lineari e angolari



- Posizione

$$\boxed{s = \theta r}$$

- Velocità

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r = \omega r}$$

- Accelerazione

tangenziale

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \alpha r}$$

centripeta

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Forze e momenti delle forze

- I moti traslatori possono essere "associati" anche and una sola forza attraverso

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

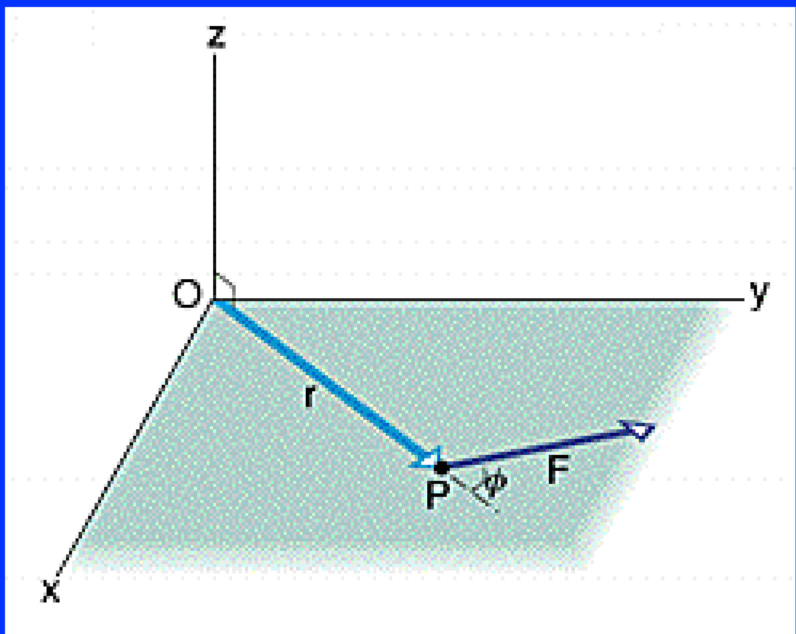
- Per generare un moto rotatorio è necessario avere almeno un coppia di forze applicate in punti diversi del corpo esteso

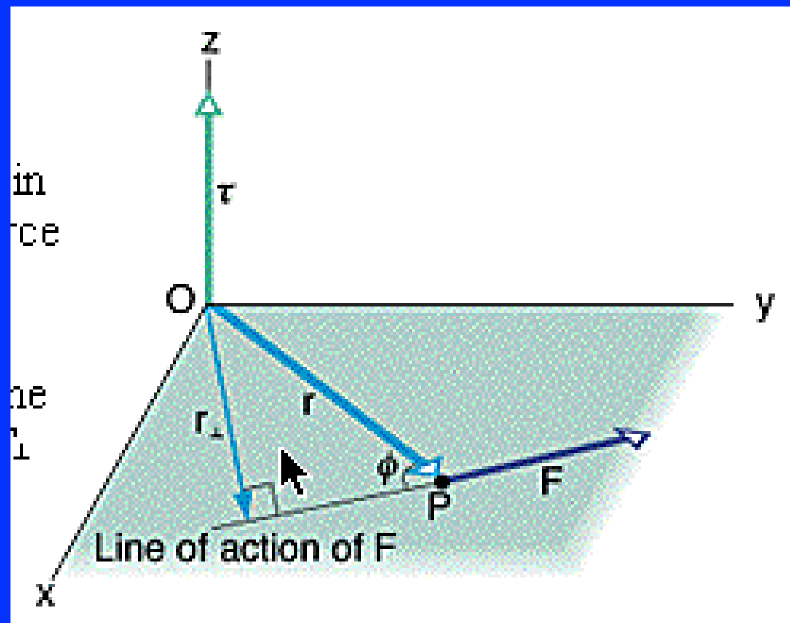
  (o anche una forza ed un punto fisso)

- Una coppia di forze genera un ***momento***

Momento di una forza

- Se si immagina di avere un punto di un corpo fissato in qualche modo ed una forza applicata ad un altro punto del corpo si può definire il ***momento della forza***



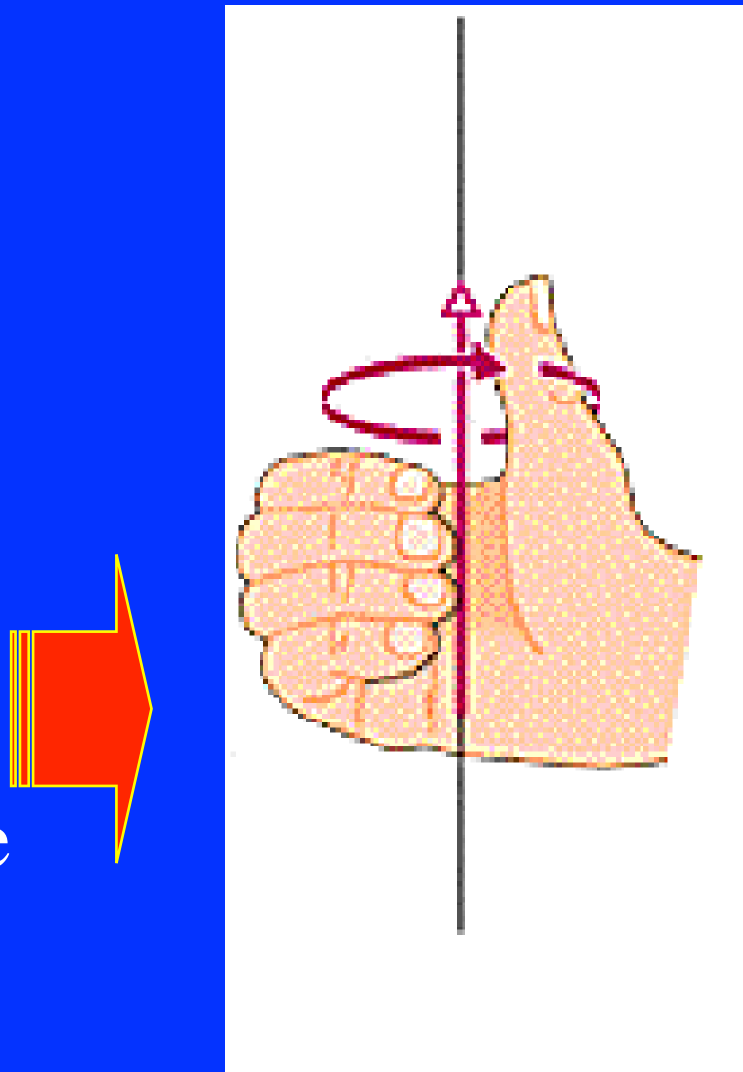


Momento di una forza II

- Il momento di una forza è un vettore definito da

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Si può pensare che un momento applicato ad un certo corpo generi una rotazione avente per il momento stesso e direzione di rotazione data dalla



Definizione di equilibrio

- In forma matematica si può scrivere

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = 0}$$ equilibrio delle forze

$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}_i = 0}$$ equilibrio dei momenti

Equilibrio stabile ed instabile

- Ci sono tre tipi di equilibrio statico:
  - stabile
  - instabile
  - indifferente

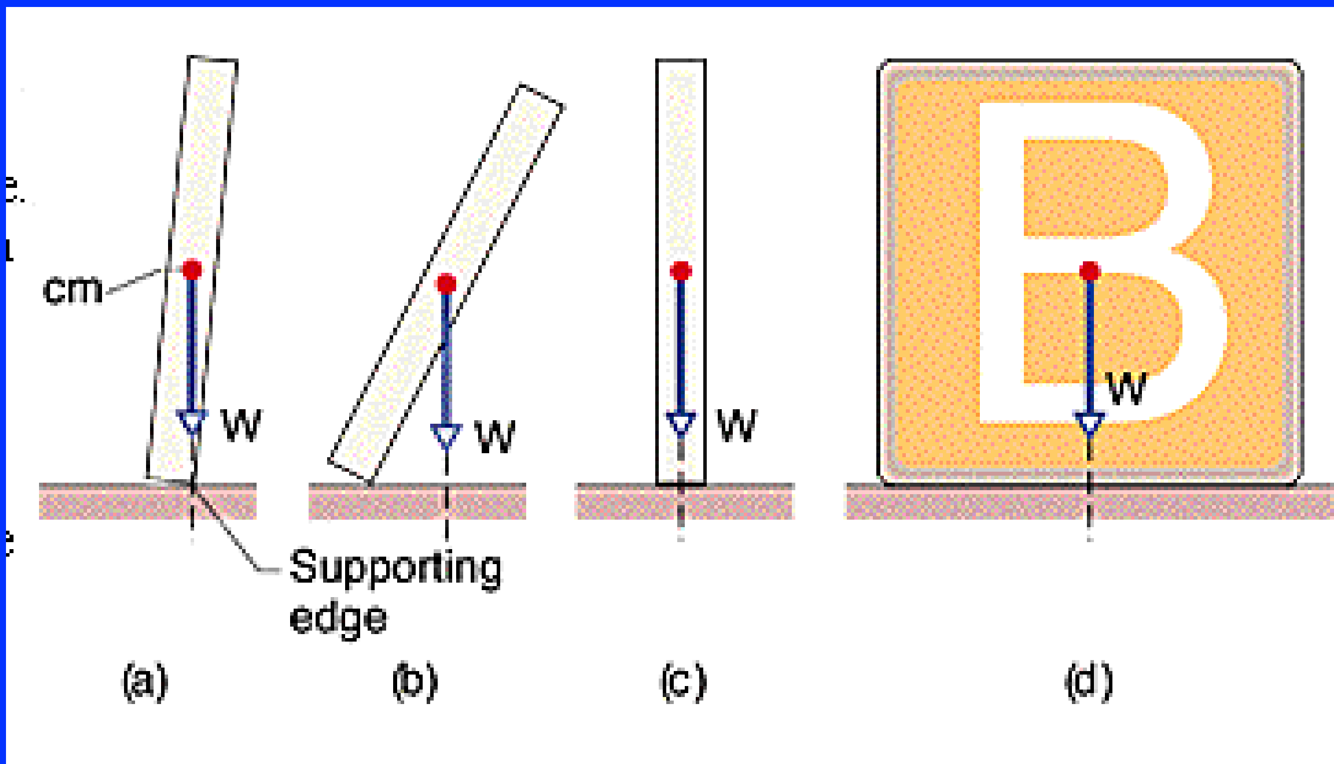


illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

Il baricentro

- Il baricentro (o centro di gravità) è il punto di un corpo al quale si può pensare applicata la forza di gravità
- Un corpo sospeso sarà in equilibrio stabile solo se il suo baricentro si trova sotto il punto di sospensione

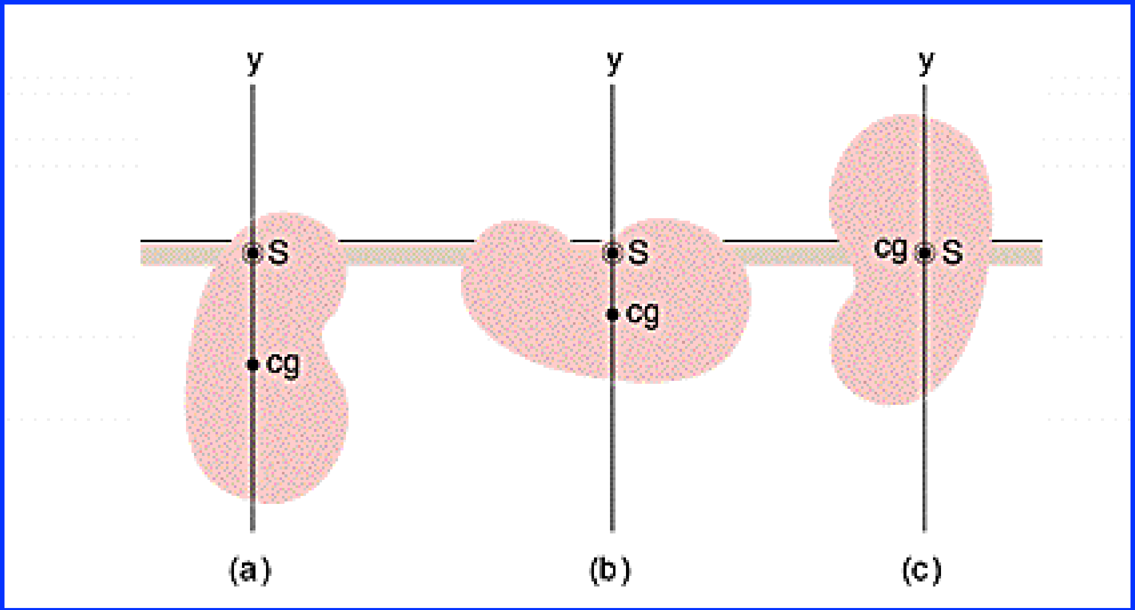


illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

Baricentro e centro di massa

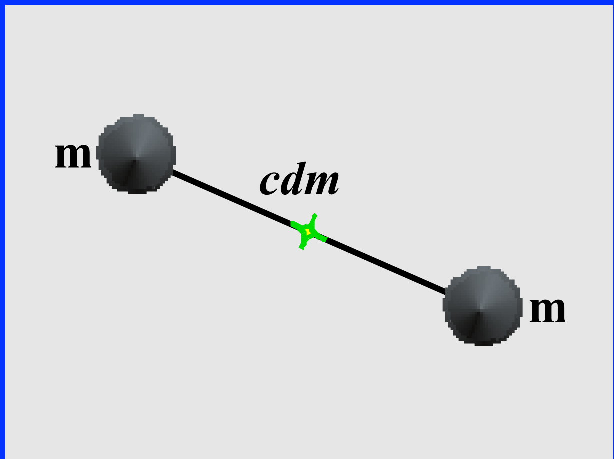
- La forza di gravità totale che agisce su un corpo esteso è la somma delle froze di gravità agenti sui singoli elementi del corpo
- Il baricentro è quel punto in cui si può *pensare* applicata la somma di tutte queste forze senza che la *reale forza risultante* ed il *reale momento netto* delle forze cambino
- Si può dimostrare che baricentro e centro di massa coincidono rigorosamente solo se l'accelerazione di *gravità è costante* per tutta l'estensione del corpo:

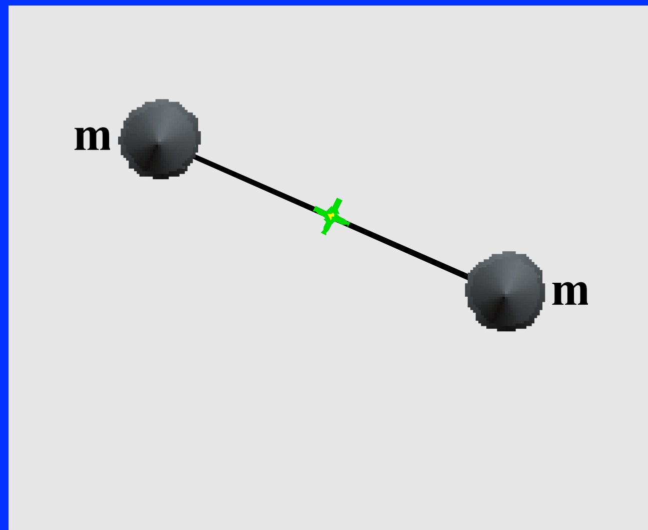
$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i} = \vec{\mathbf{r}}_{baric}$$

(gravità costante su tutto il corpo esteso)

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

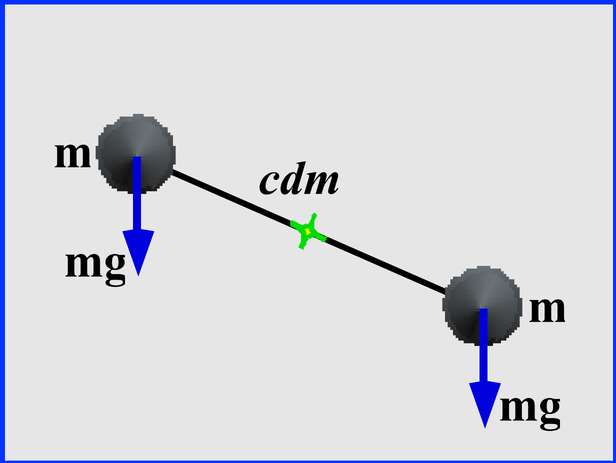


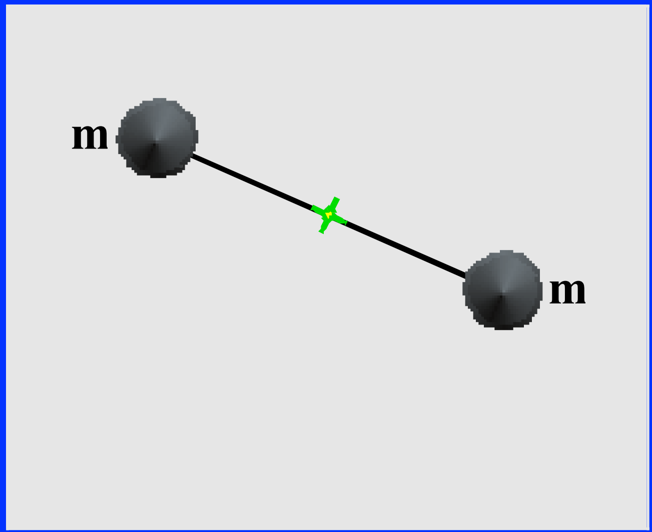


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

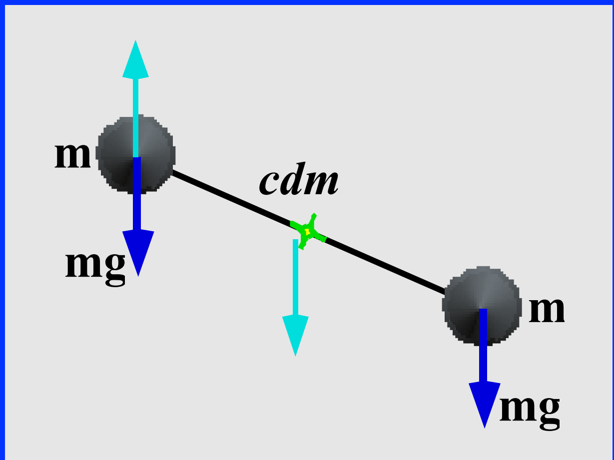


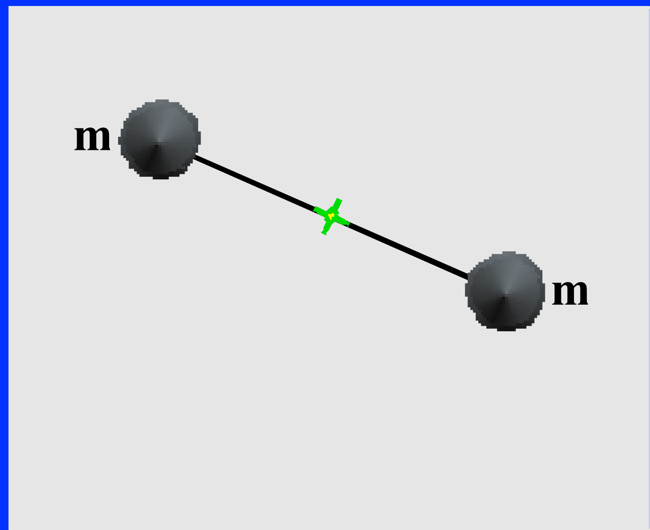


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità
costante su tutto il corpo

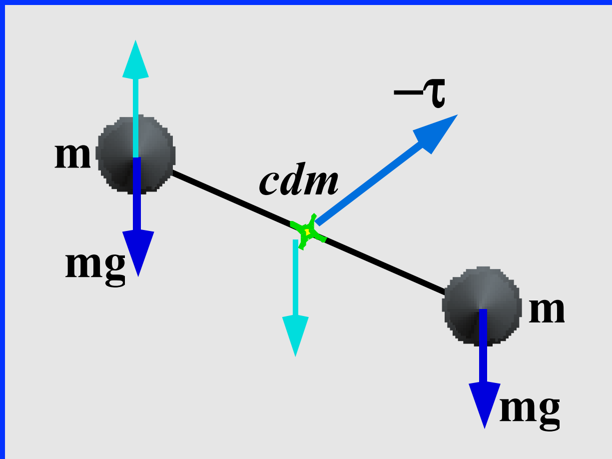


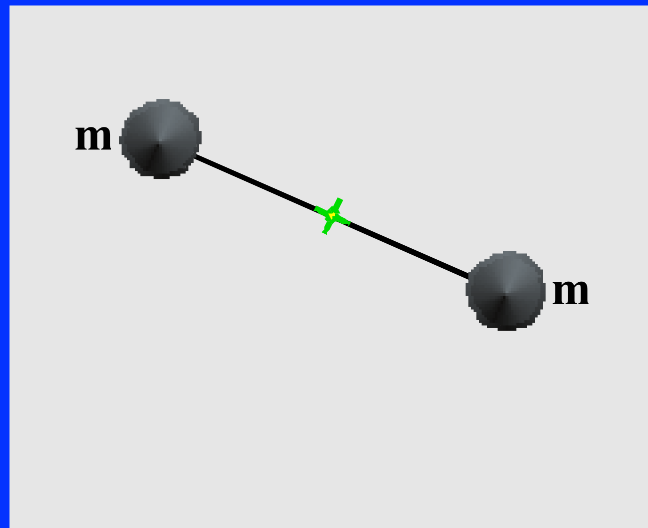


Accelerazione di gravità
diversa per diverse parti
del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità
costante su tutto il corpo

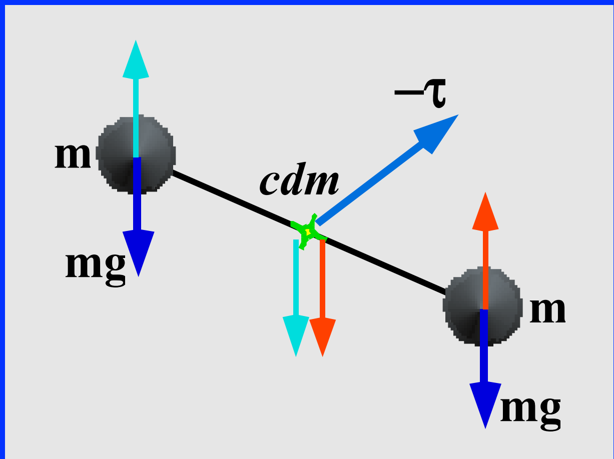


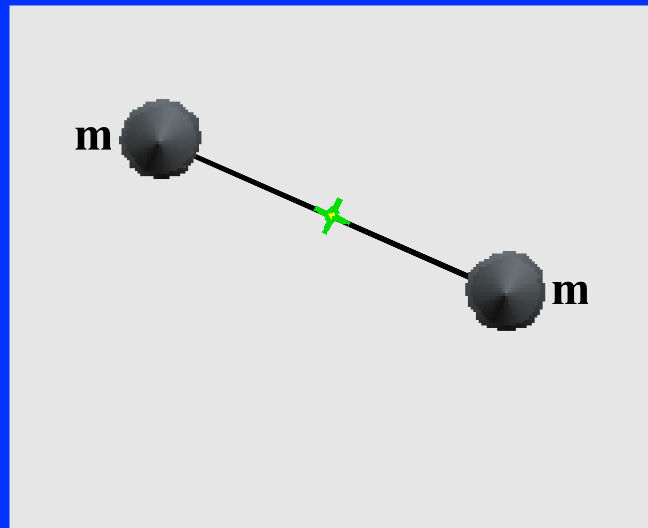


Accelerazione di gravità
diversa per diverse parti
del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

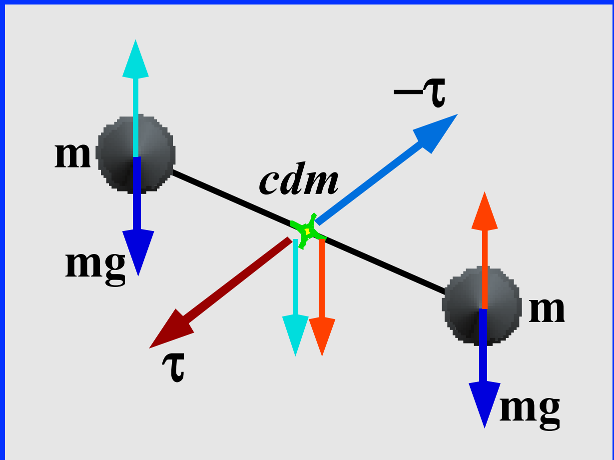


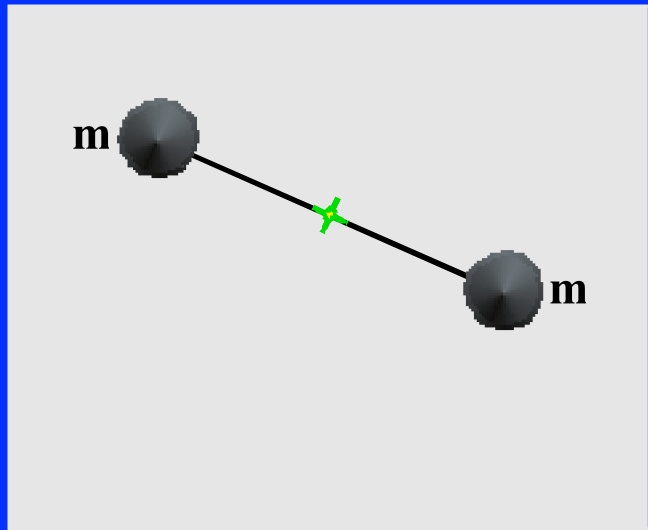


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

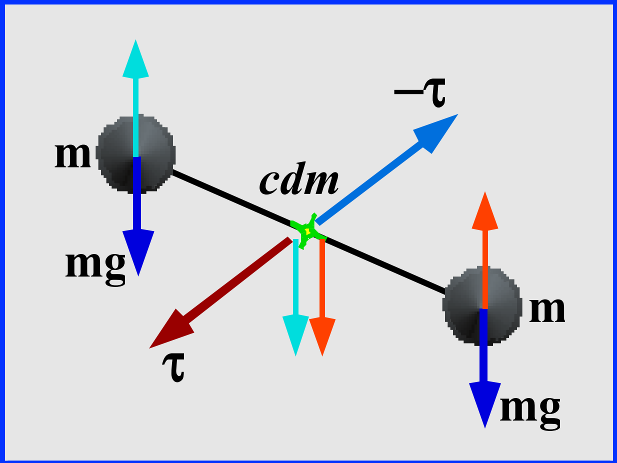


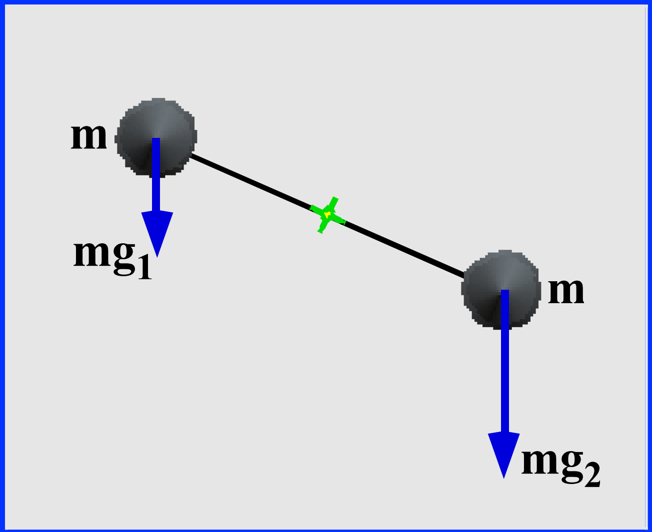


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

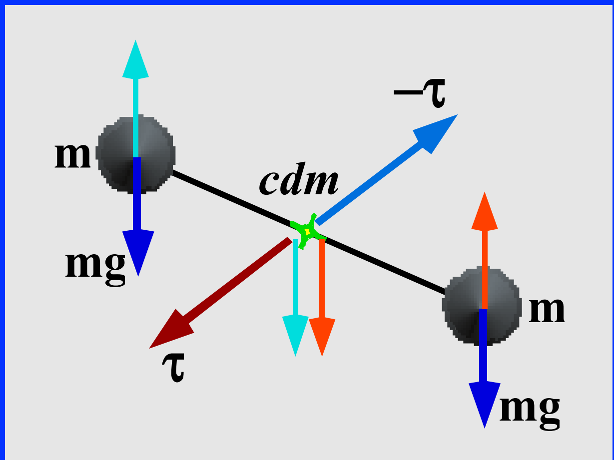


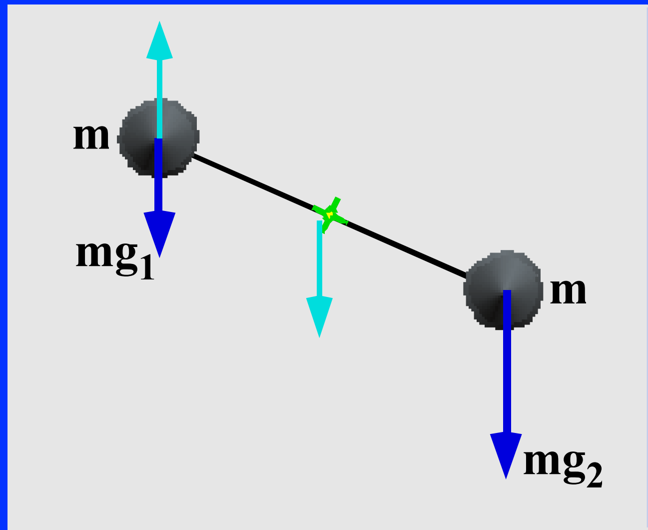


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

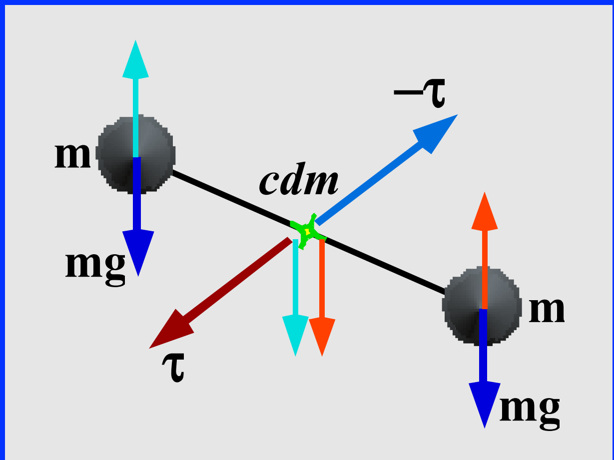


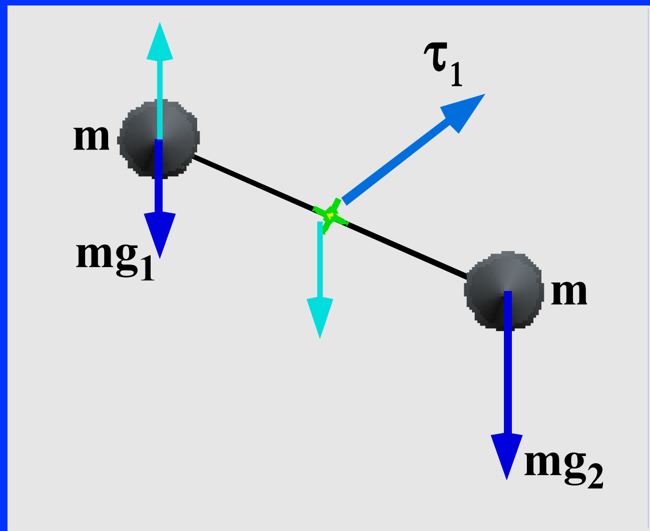


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo



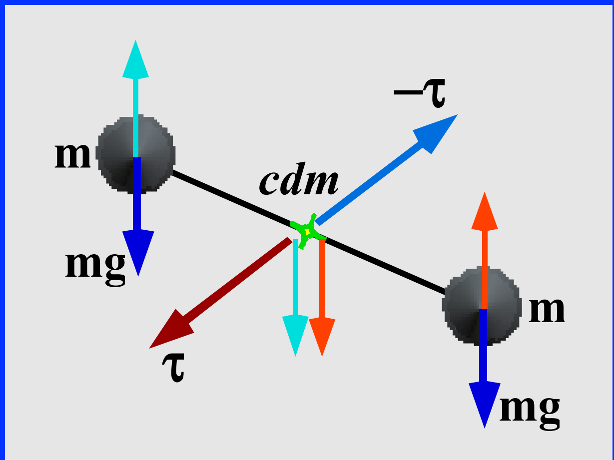


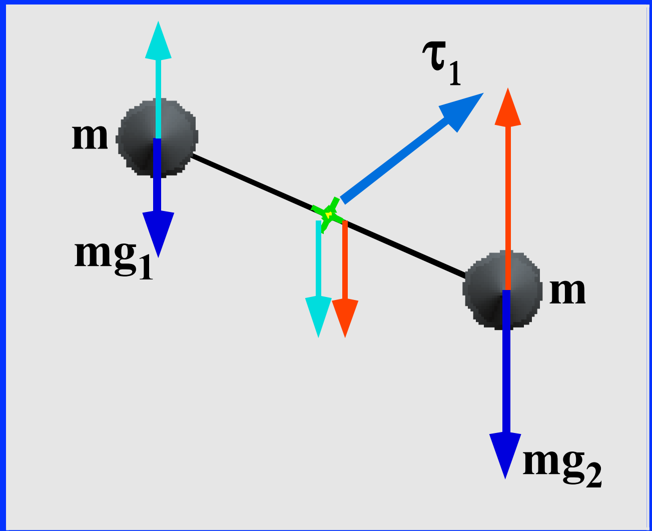
Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Monday, January 11, 2010

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

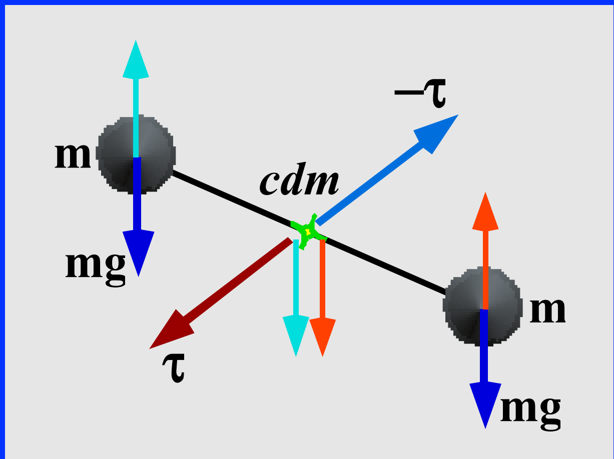


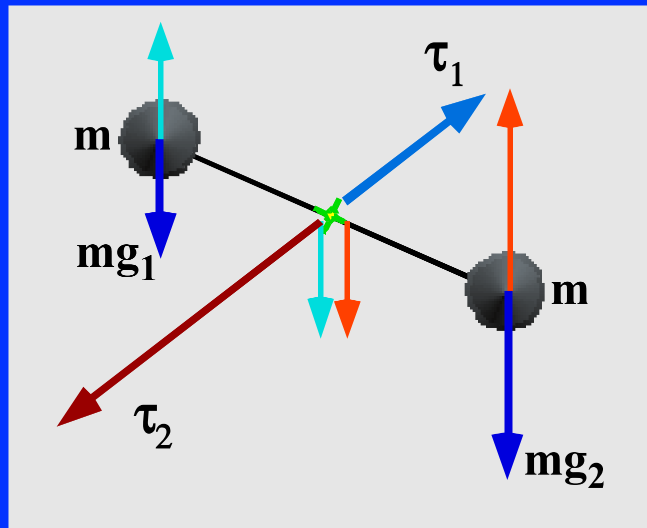


Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Baricentro e centro di massa II

Accelerazione di gravità costante su tutto il corpo

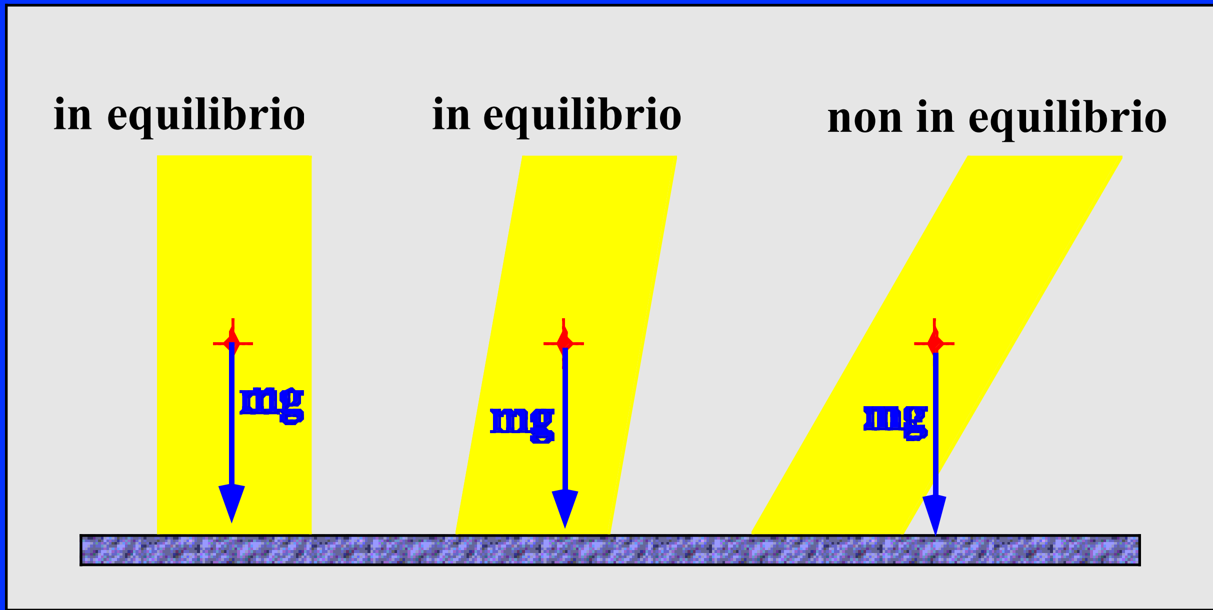




Accelerazione di gravità diversa per diverse parti del corpo

Corpo esteso su un piano orizzontale

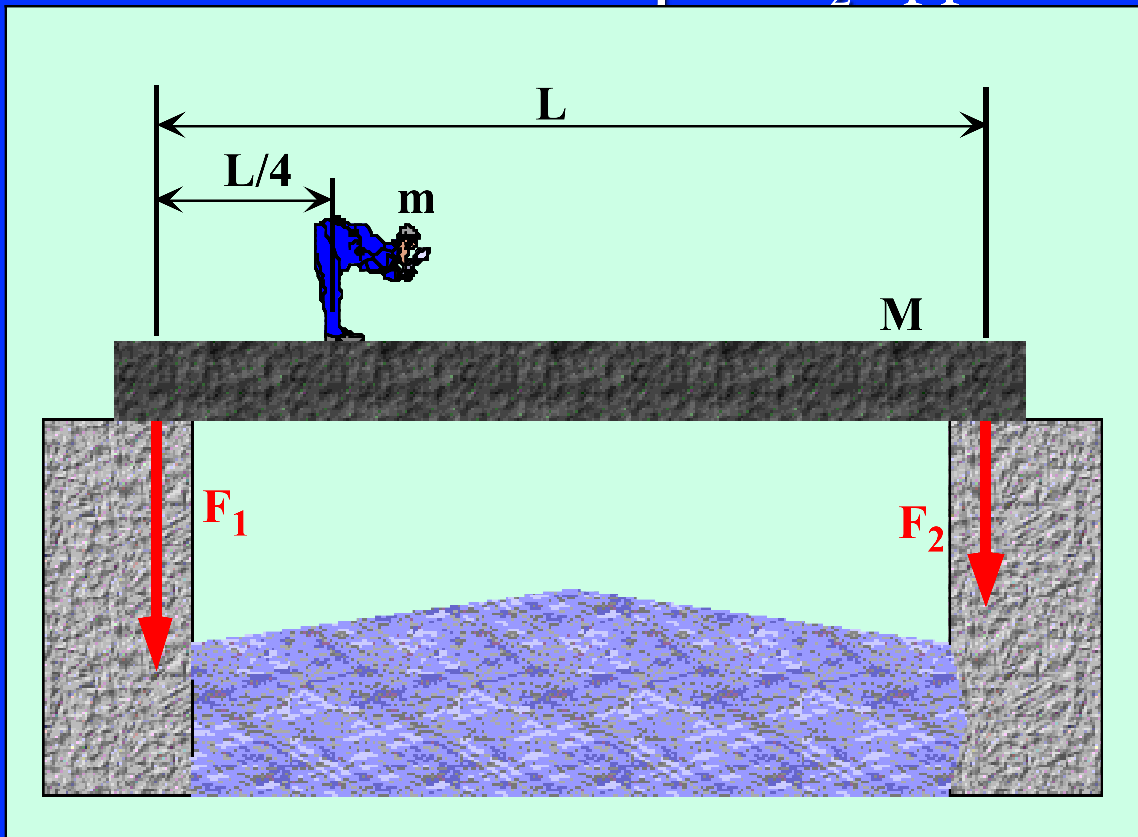
- Un corpo esteso poggiato su di un piano orizzontale è in equilibrio se la proiezione del baricentro cade entro l'impronta dell'oggetto stesso sul piano di appoggio



- Infatti, nel caso a destra in figura la forza peso possiede, rispetto ad esempio allo spigolo del corpo, un momento torcente non equilibrato dal momento delle forze di reazione del piano di appoggio

Esempio di sistema in equilibrio statico

- L'architetto (di massa m = 72 kg) controlla il ponte, fatto di una trave di massa M = 270 kg e lunga L metri, standο ad una distanza L/4 dal primo pilone
- Vogliamo calcolare le forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ applicate ai piloni



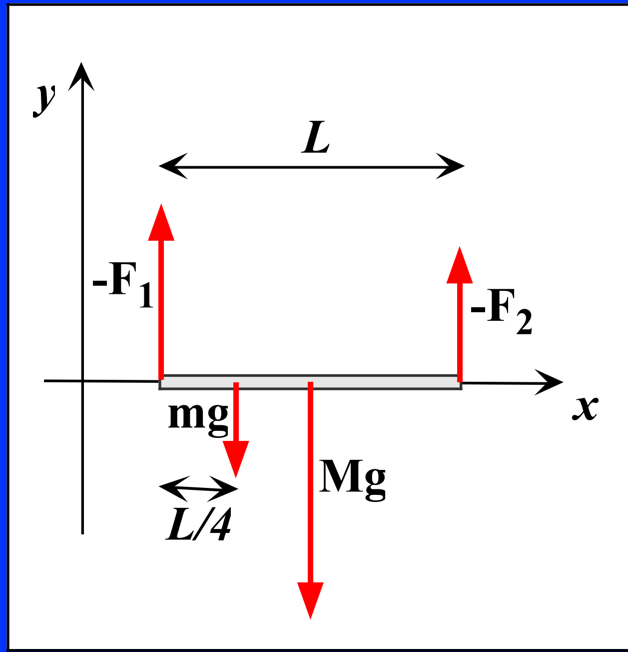
(segue esempio: equilibrio delle forze)

- La prima condizione da soddisfare è quelle dell'equilibrio delle forze

$$\boxed{\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0}$$

in questo caso diventa

$$\boxed{-\vec{\mathbf{F}}_1 - \vec{\mathbf{F}}_2 + m\vec{\mathbf{g}} + M\vec{\mathbf{g}} = 0}$$



- Proiettando lungo gli assi coordinati *x* ed *y* si ottengono due equazioni, delle quali solo una contiene informazioni:

lungo *x*

$$\boxed{0 = 0}$$

lungo *y*

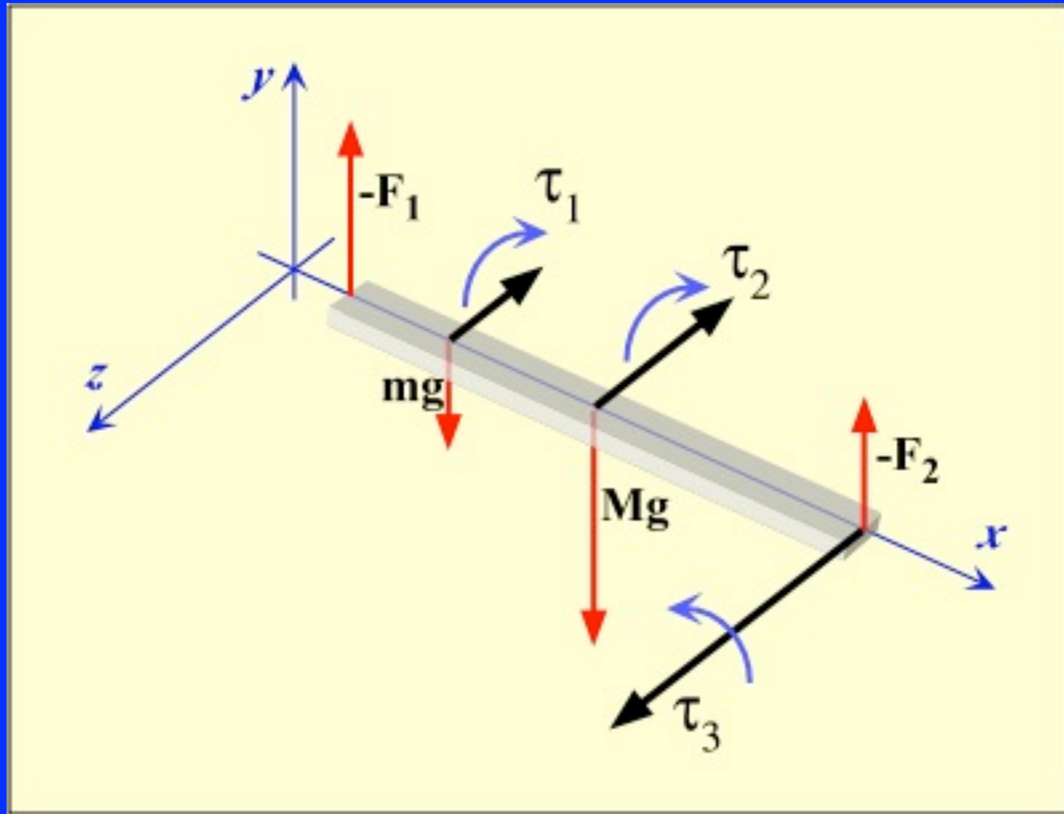
$$\boxed{F_1 + F_2 - (m + M)g = 0} \quad \boxed{(1)}$$

(segue esempio: equilibrio di momenti)

- La seconda condizione necessaria per l'equilibrio statico, quella sui momenti, fornirà ulteriori informazioni

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

$$\vec{\tau}(\vec{F}_1) = 0$$
$$\vec{\tau}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 \times m\vec{\mathbf{g}} \; ; \; |\vec{\mathbf{r}}_1| = L/4$$
$$\vec{\tau}_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 \times M\vec{\mathbf{g}} \; ; \; |\vec{\mathbf{r}}_2| = L/2$$
$$\vec{\tau}_3 = \vec{\mathbf{r}}_3 \times \left(-\vec{\mathbf{F}}_2\right) \; ; \; |\vec{\mathbf{r}}_3| = L$$



Siccome tutti i momenti sono diretti lungo l'asse z si può scrivere:

$$\tau_3 - \tau_1 - \tau_2 = 0 \Rightarrow LF_2 - \frac{L}{2}Mg - \frac{L}{4}mg = 0 \Rightarrow F_2 - \frac{Mg}{2} - \frac{mg}{4} = 0 \quad (2)$$

(segue esempio: conclusione)

- Si combinano finalmente in un sistema le equazioni (1) e (2) per ricavare le intensità delle forze cercate:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 - (m+M)g = 0 \\ F_2 - \dfrac{Mg}{2} - \dfrac{mg}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = -F_2 + (m+M)g \\ F_2 = \left(\dfrac{M}{2} + \dfrac{m}{4}\right)g \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F_1 = \left(\dfrac{M}{2} + \dfrac{3}{4}m\right)g = \left(\dfrac{270\ \text{kg}}{2} + \dfrac{3 \cdot 72\ \text{kg}}{4}\right) \cdot 9.81\ \text{m/s}^2 = 1854\ \text{N} \\ F_2 = \left(\dfrac{M}{2} + \dfrac{m}{4}\right)g = \left(\dfrac{270\ \text{kg}}{2} + \dfrac{72\ \text{kg}}{4}\right) \cdot 9.81\ \text{m/s}^2 = 1500\ \text{N} \end{cases}$$

Equlibrio e lavoro virtuale

- La condizione di equilibrio statico di un sistema meccanico si può formulare in maniera concisa e potente utilizzando il principio dei lavori virtuali
- In sostanza, si immagina di spostare il sistema in esame di *infinitamente poco* dalla sua posizione di equilibrio e di calcolare il conseguente *lavoro fatto dalle forze* in gioco
- Il **principio del lavori virtuali** afferma che il lavoro fatto in corrispondenza ad un virtuale spostamento infinitesimo di un sistema in equilibrio statico deve essere nullo

Lavoro virtuale

- Il lavoro virtuale può essere considerato nullo per due motivi
  - lo spostamento immaginato del sistema è infinitesimo, per cui la nuova posizione è ancora praticamente una posizione di equilibrio
  - quando un corpo rigido è in equilibrio, preso un qualsiasi punto del corpo, la forza netta agente su di esso è nulla e quindi anche il lavoro fatto è nullo

Principio dei lavori virtuali

$$\mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_i = \sum_i \left(\vec{\mathbf{F}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{s}}_i \right) = 0$$

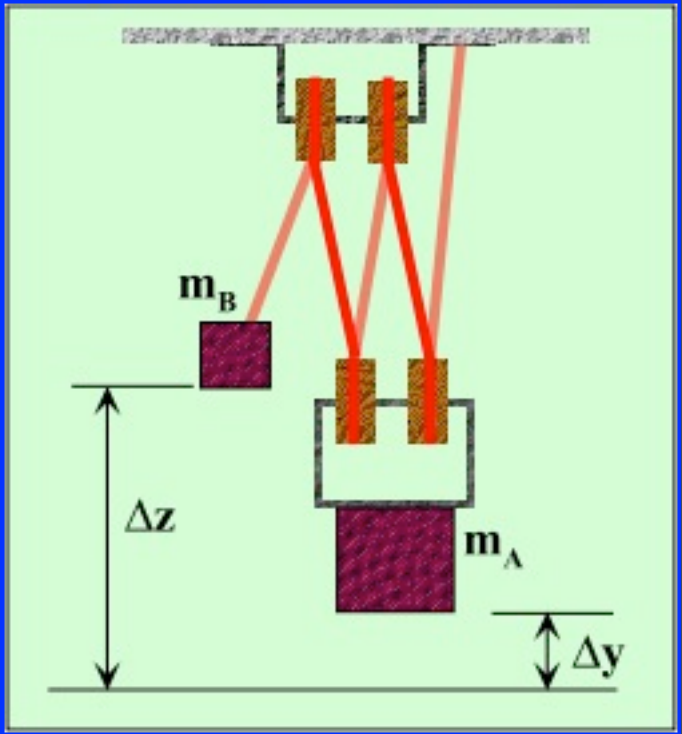
$\mathbf{F_i}$ = forze agenti sul sistema escluse le reazioni vincolari

$\Delta \mathbf{s_i}$ = spostamento infinitesimo del punto di applicazione compatibile con i vincoli

- Le forze vincolari non compiono mai lavoro, per cui non compaiono nelle equazioni ricavate con il principio dei lavori virtuali, che risultano perciò semplificate
- Le forze vincolari intervengono comunque implicitamente, visto che gli spostamenti virtuali devono essere sempre compatibili con i vincoli

Esempio di applicazione

- Data la massa $\mathbf{m_A}$ appesa alla carrucola mobile, calcoliamo la massa $\mathbf{m_B}$ tale che il sistema sia in equilibrio
- Immaginiamo allora di spostare la massa $\mathbf{m_A}$ di un tratto Δ**y**: dalla disposizione delle quattro carrucole è chiaro che la massa m_B si sposta di un tratto Δ**z** = 4Δ**y**
- Le forze in gioco ed i corrispondenti lavori virtuali sono:



$$F_A = m_A g \quad ; \quad F_B = m_B g$$

$$\mathcal{L}_A = F_A \Delta y = m_A g \Delta y$$
$$\mathcal{L}_B = -F_B \Delta z = -m_B g \Delta z$$

$$\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B = 0$$
$$m_A g \Delta y - m_B g (4\Delta y) = 0$$

$$m_B = m_A / 4$$