Lezione 13 - La legge di Gauss

- Armati dei concetti fin qui introdotti possiamo enunciare la **legge di Gauss**

$$\boxed{\Phi = \frac{q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0}}$$

o anche

$$\boxed{\oint_{\text{sup. Gaussiana}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0}}$$

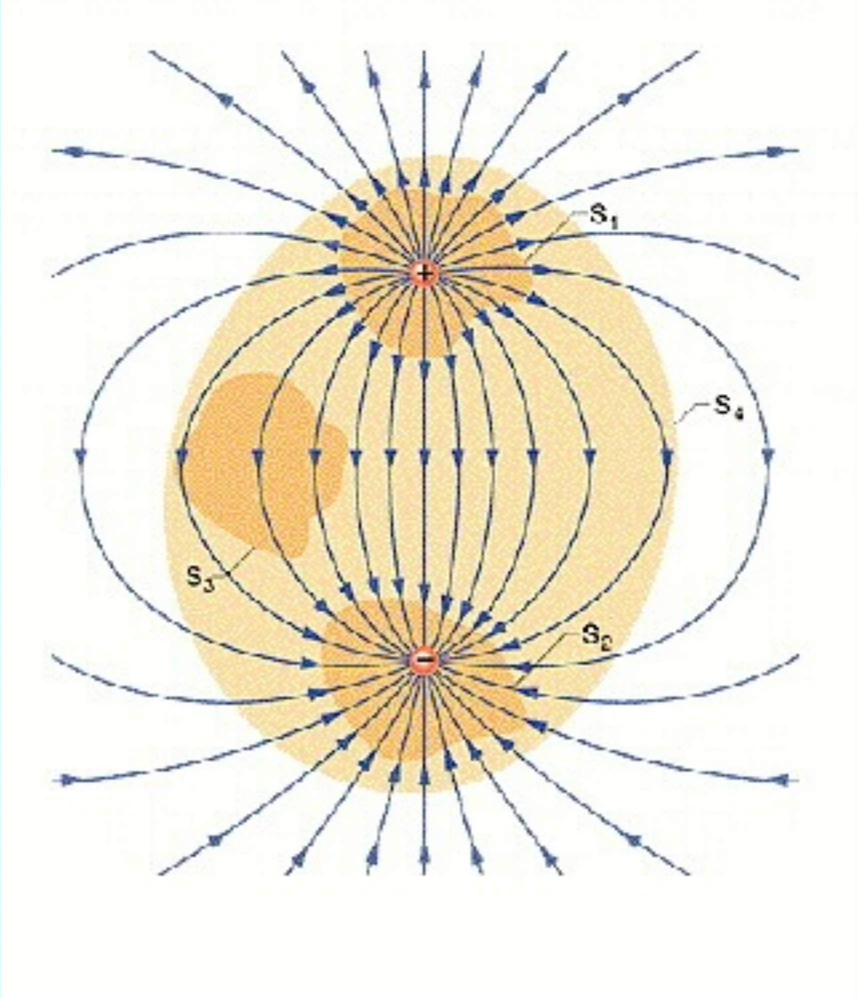


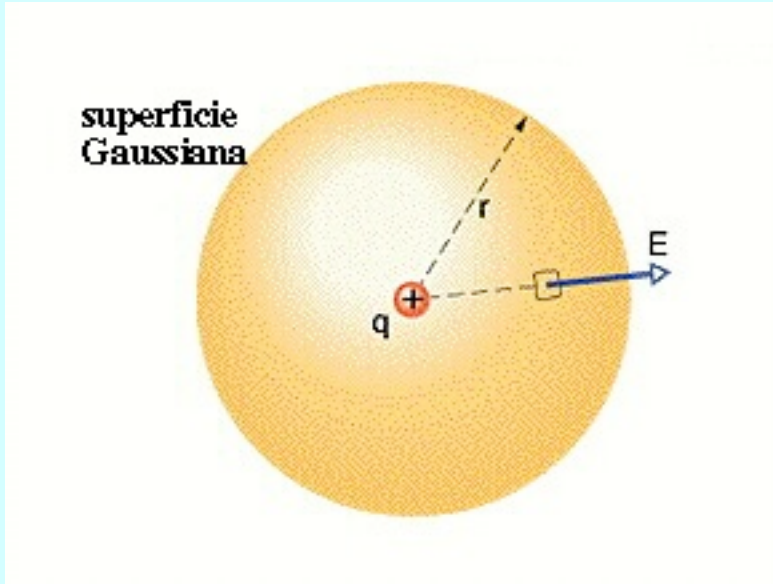
illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

Considerazioni sulla legge di Gauss

- Notare che la legge di Gauss mette in relazione il campo misurato su una superficie chiusa con la quantità totale di carica contenuta all'interno della superficie
- La forma e la posizione delle cariche interne non hanno alcuna importanza
- Le cariche esterne alla superficie non contribuiscono al flusso, tuttavia il campo elettrico da considerare è quello creato da tutte le cariche, sia interne sia esterne

Gauss e Coulomb

illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano



- Il *legame strettissimo tra la legge di Gauss e quella di Coulomb* si vede facilmente considerando il caso di una carica puntiforme
- Presa la carica puntiforme **q**, si usa come superficie gaussiana una sfera di raggio **r**
- Per motivi di simmetria il campo elettrico **E** non può che essere diretto radialmente ed avere uguale intensità ad uguali distanze da **q**
- Il flusso Φ è allora

$$\Phi = \oint_{\text{sfera}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_{\text{sfera}} E\,dA\cos(0) = E\oint_{\text{sfera}} dA = 4\pi r^2 E$$

- **Applicando la legge di Gauss**

$$\boxed{\Phi = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

- **Si ritrova quella di Coulomb**

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

Conduttore carico isolato

- La carica in eccesso presente su di un conduttore isolato **si distribuisce sulla superficie**: la carica interna è sempre nulla (*caso a*)
- Vale anche nel caso il conduttore presenti una cavità interna (*caso b*)

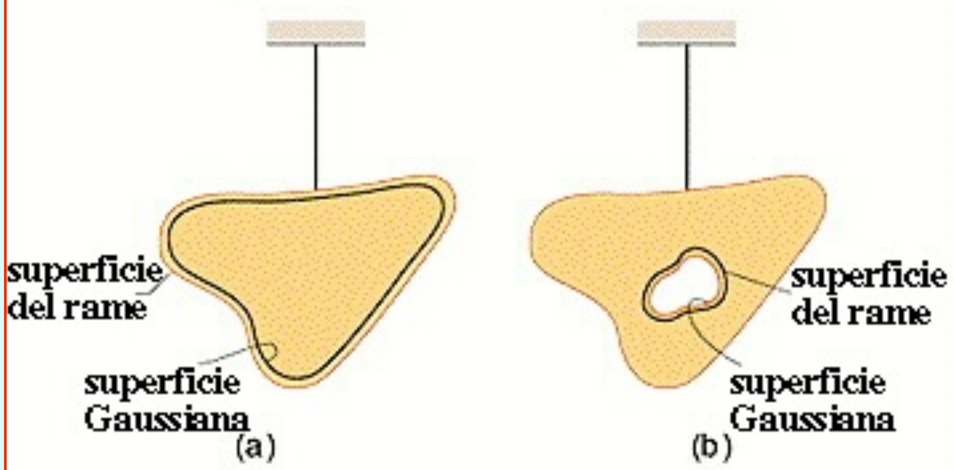


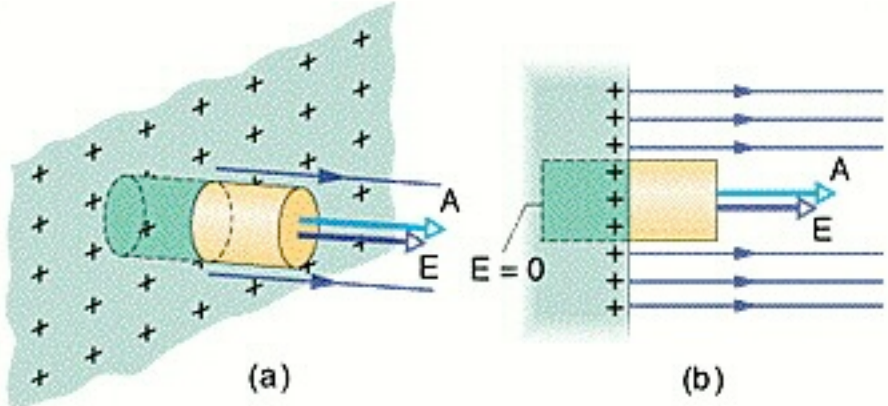
illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

Entrambe le proposizioni possono essere dimostrate dalla legge di Gauss definendo in maniera opportuna la superficie gaussiana che si utilizza e ricordando che <u>E all'interno di un conduttore è sempre nullo</u>

Campo E all'esterno di un conduttore

- La carica in generale ***non*** si distribuisce uniformemente sulla superficie di un conduttore
- Nota però la distribuzione di carica superficiale σ, dalla legge di Gauss si ricava facilmente il campo elettrico E appena fuori della superficie di un conduttore

illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano



flusso di E attraverso il cilindretto gaussiano

$$\boxed{\varepsilon_0 EA = \sigma A}$$

carica totale contenuta nel cilindretto gaussiano

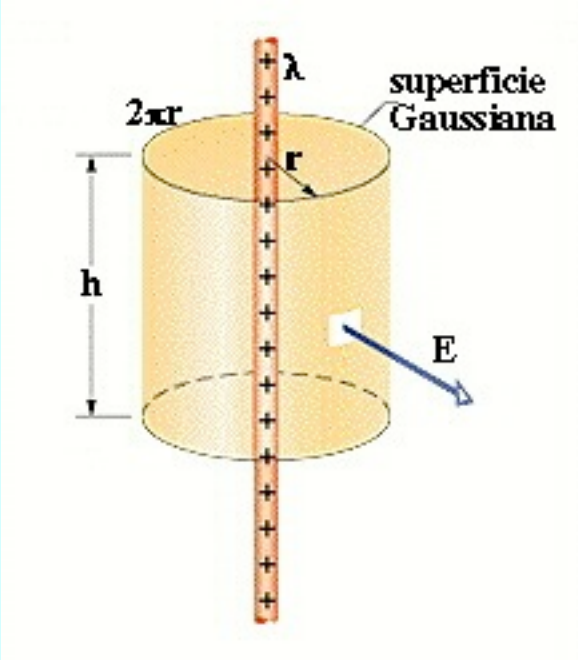
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

campo elettrico E vicino alla sup. di un conduttore

Gauss: simmetria cilindrica

illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

- Si calcola il campo elettrico **E** generato da una bacchetta isolante carica molto lunga sfruttando la simmetria clindrica



flusso di E attraverso il cilindro

$$\boxed{\Phi = EA_{lat} + EA_{basi} = 2\pi rhE}$$

$$\boxed{q_{\text{interna}} = \lambda h}$$

carica totale interna al cilindro

Gauss

$$\boxed{\varepsilon_0 E 2\pi rh = \lambda h}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

campo elettrico E generato dalla bacchetta

Simmetria piana: foglio isolante

- Il campo E generato da un **foglio sottile isolante** carico con densità superficiale di carica σ si calcola usando la simmetria piana del problema

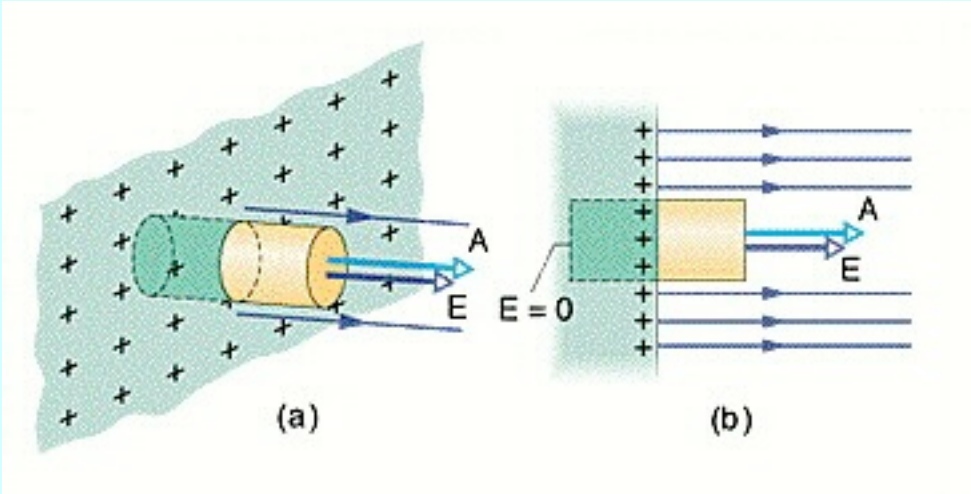


illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

legge di Gauss

$$\boxed{\varepsilon_0\Phi = \varepsilon_0\left(EA_{lat} + 2EA_{base}\right) = \sigma A_{base}}$$

$$\boxed{\varepsilon_0 2EA_{base} = \sigma A_{base}}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

campo E del foglio isolante

Simmetria piana: piatti conduttori

(a) piatto conduttore con densità di carica superficiale $\sigma_1 > 0$

(b) come in (a) ma con $\sigma_1 < 0$

(c) i due piatti con cariche opposte vicini l'uno all'altro

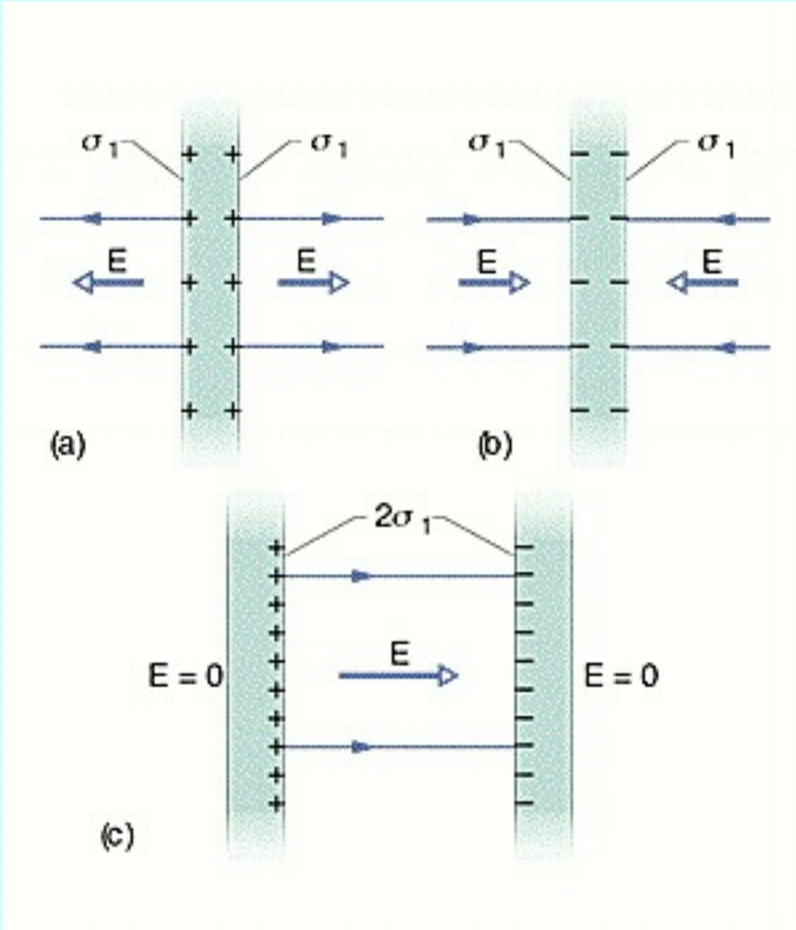


illustrazione tratta da: Halliday-Resnick-Walker,"Fondamenti di Fisica", IV Ed., Ambrosiana, Milano

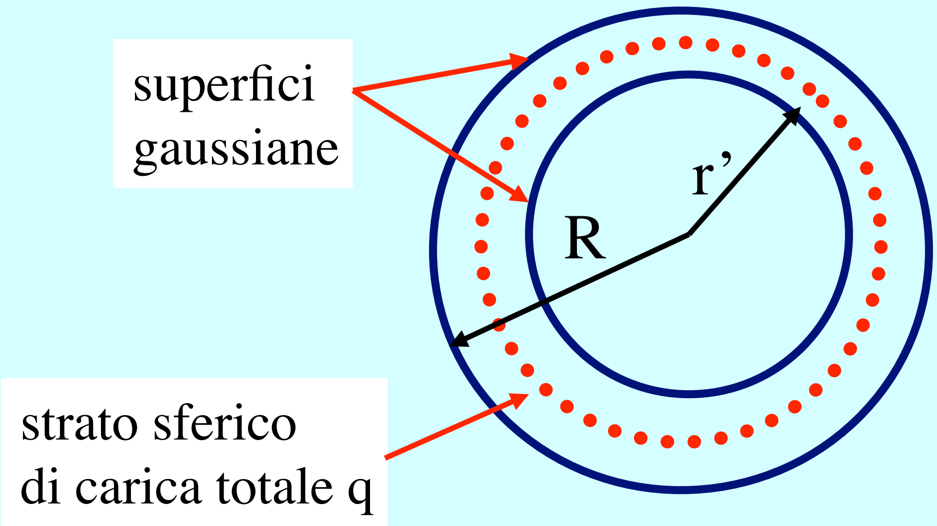
$$E_a = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_b = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_c = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Simmetria sferica

- Uno strato carico a simmetria sferica si comporta:
  - come una carica puntiforme per cariche esterne allo strato
  - come una carica nulla per cariche interne allo strato



Superficie interna:

$$\boxed{q_{\text{interna}} = 0 \Rightarrow E_{\text{interno}} = 0}$$

Superficie esterna:

$$\boxed{q_{\text{interna}} = q \Rightarrow E_{\text{esterno}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Energia potenziale elettrica I

- La forza elettrostatica è una **forza conservativa**
- Questo significa che è possibile definire una **energia potenziale elettrica**

Se il sistema passa da uno stato iniziale ***i*** ad uno stato finale ***f*** e la forza elettrostatica compie un lavoro ***L*** sulle cariche scriveremo

$$\boxed{\Delta U = U_f - \mathrm{U_i} = -L}$$

in base alla definizione di ***variazione di energia potenziale***

E' chiaro che il lavoro ***L*** fatto dalla forza elettrostatica non dipende dal cammino

Energia potenziale elettrica II

- L'energia potenziale è sempre definita a partire da una configurazione di riferimento
- Per convenzione, porremo U = 0 quando tutte le particelle cariche sono infinitamente distanti le une dalle altre
- L'energia potenziale elettrica di un certo sistema di cariche è allora

$$\boxed{U = -L_\infty}$$

dove L_∞ è il lavoro fatto dalle forze elettrostatiche per portare le cariche dall'infinito alla posizione corrente

Potenziale elettrico

- Dato un certo campo elettrico, l'energia potenziale elettrica di una particella carica dipende dalla carica stessa
- Se però si definisce l'*energia potenziale elettrica per unità di carica* si ottiene una quantità che ha un valore univoco in ogni punto del campo:

$$\boxed{V = \frac{U}{q}}$$

V si misura in Joule/Coulomb e si chiama potenziale elettrico

Nota bene: V è uno scalare e non un vettore

Differenza di potenziale

- La differenza di potenziale (ddp) è la differenza di energia potenziale elettrica per unità di carica tra due punti dello spazio:

$$\boxed{\mathrm{ddp} = \Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q}}$$

- In termini di lavoro L fatto dalle forze elettrostatiche si scrive:

$$\boxed{\mathrm{ddp} = \Delta V = V_f - V_i = -\frac{L}{q}}$$

Potenziale e Volts

- Supponendo il potenziale nullo all'∞ secondo quanto convenuto, si ha come *definizione del potenziale dovuto ad un certo campo*:

$$\boxed{V = -\frac{L_\infty}{q}}$$

- Per misurare i potenziali si introduce una nuova unità di misura derivata, il **Volt** [V]:

$$\boxed{1 \ \mathrm{V} = \frac{1 \ \mathrm{J}}{1 \ \mathrm{C}} = \frac{1 \ \mathrm{Joule}}{1 \ \mathrm{Coulomb}}}$$

Lavoro delle forze applicate

- Supponiamo di avere una particella carica immersa in un campo elettrico e di applicare una forza per spostarla. La forza compirà un lavoro L_{app}. Il teorema dell'energia cinetica dice allora

$$\boxed{\Delta K = K_f - K_i = L_{app} + L}$$

dove L è il lavoro fatto dal campo elettrico.

- Se la particella parte ferma e arriva ferma, allora

$$\boxed{\Delta K = 0 \Rightarrow L_{app} = -L}$$

e quindi

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = L_{app}}$$