# *Metodi multicriterio*

- Esistono diverse categorie di metodi che intendono tenere conto di *criteri di valutazione differenti* e non tutti monetizzabili:
  - *metodi non compensatori*
  - *metodi compensatori*, che cercano di sintetizzare le diverse misure in un’unica misura sintetica;
  - *metodi parzialmente compensatori*, che ammettono la non comparabilità tra certe alternative;
  - *metodi che utilizzano il concetto di ideale*.

- Metodi non compensatori
- Metodi compensatori
  - Metodi basati sul concetto di *utilità* o di *valore*.
  - Metodo AHP
- Metodi parzialmente compensatori
  - Metodi basati sul concetto di *surclassamento* (ELECTRE)
- Metodi basati sul concetto di soluzione ideale
  - Metodo TOPSIS

# Riprendiamo l'Esempio 1

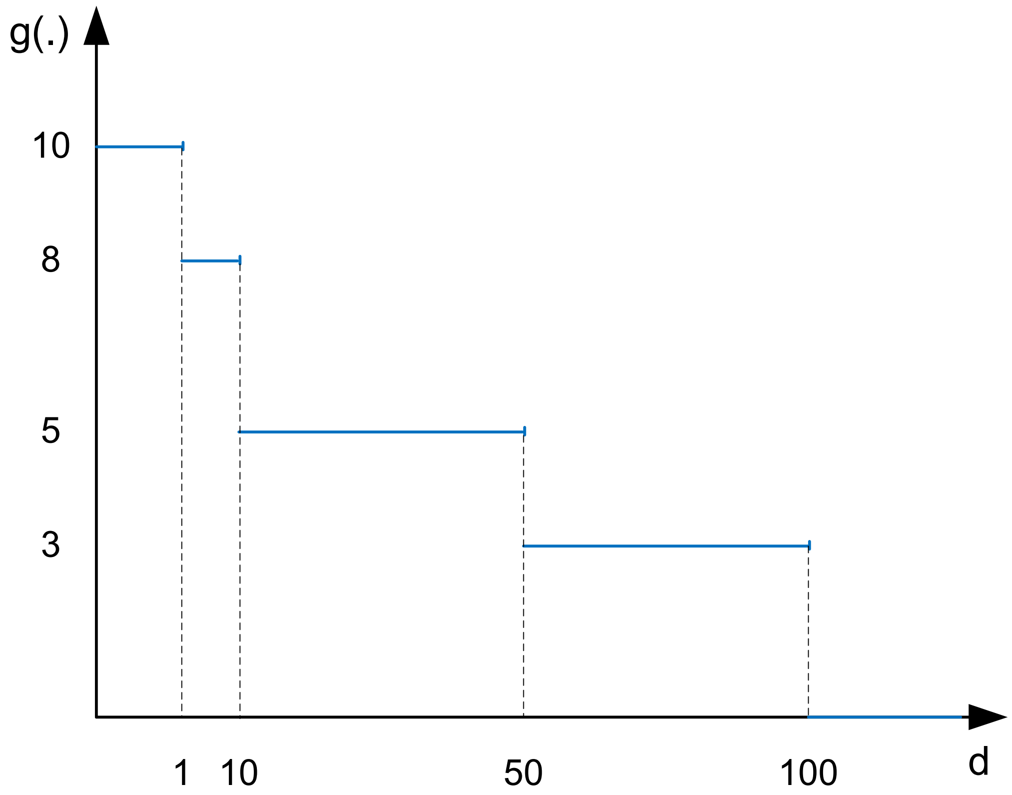
- Le tre alternative saranno confrontate solo secondo i criteri Cr1 e Cr2.

| | Cr1 (km) | Cr2 (%) |
|---|---|---|
| Alt A | 1,5 | 15 |
| Alt B | 11,0 | 18 |
| Alt C | 52,0 | 50 |

- Intervistando il decisore si sono costruite delle *funzioni di preferenza* g(.) a punteggio da 0 a 10.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Cr1 | d>100 | 50<d<=100 | 10<d<=50 | 1<d<=10 | d<1 |
| g1 | 0 | 3 | 5 | 8 | 10 |
| Cr2 | A<10% | 10%<A<20% | 20%<A<50% | 50%<A<100% | |
| g2 | 0 | 4 | 8 | 10 | |

Tale assegnazione corrisponde ad una funzione del tipo seguente (caso di Cr1):



- Questo consente di assegnare un punteggio a ogni alternativa secondo ciascun criterio:

| | $g_1$ | $g_2$ |
|---|---|---|
| Alternativa A | 8 | 4 |
| Alternativa B | 5 | 4 |
| Alternativa C | 3 | 8 |

- Chiameremo l'insieme dei valori relativi a un'alternativa (riga) *profilo dell'alternativa* secondo i criteri scelti.
- Più in generale:

| | $g_1$ | ... | $g_k$ | ... | $g_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | $g_1(a_i)$ | ... | $g_k(a_i)$ | ... | $g_m(a_i)$ |

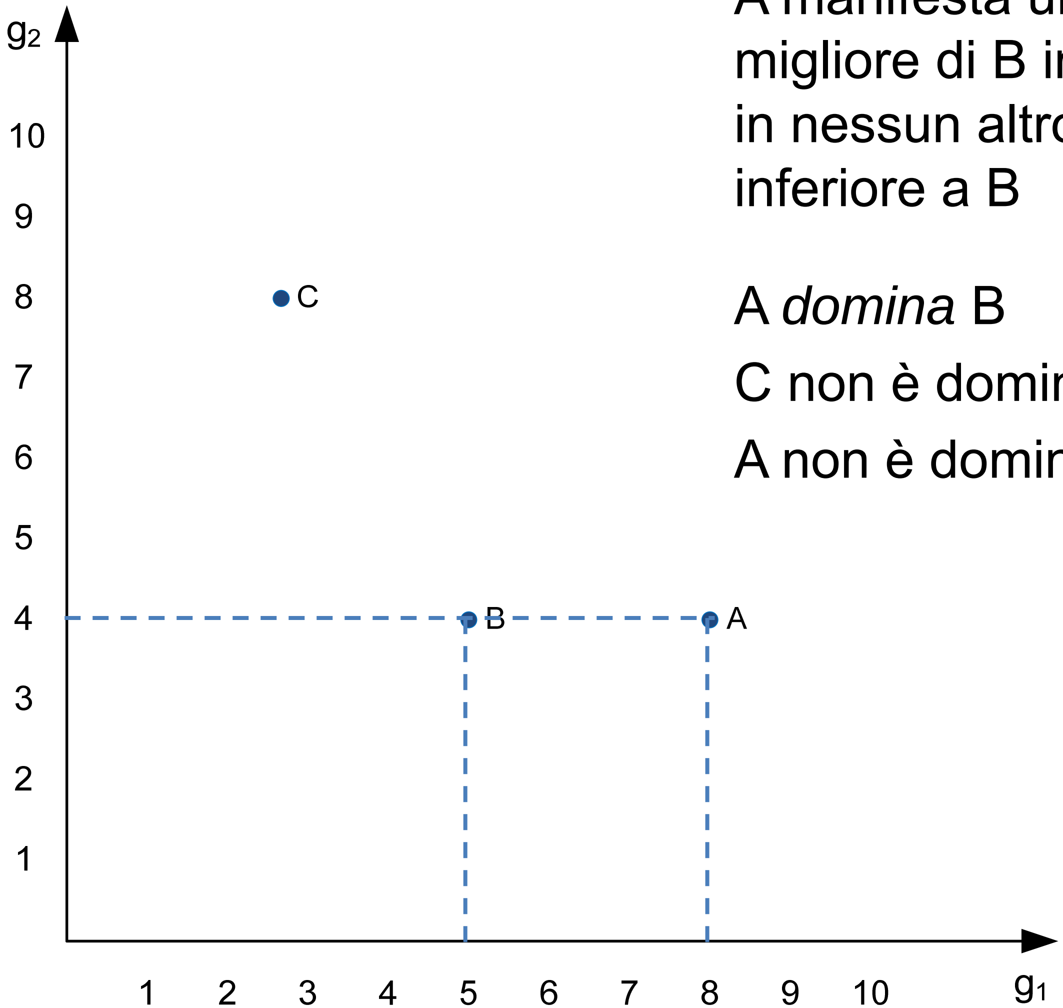
- I risultati che si ottengono per le alternative sono:

| | $g_1$ | $g_2$ |
|---|---|---|
| Alternativa A | 8 | 4 |
| Alternativa B | 5 | 4 |
| Alternativa C | 3 | 8 |

- Non c’è nessuna alternativa che presenta un punteggio più alto delle altre in entrambi i criteri:

  tuttavia osserviamo A e B...

## Graficamente:




A manifesta una prestazione migliore di B in un criterio e in nessun altro criterio è inferiore a B

A *domina* B

C non è dominata

A non è dominata

# *Metodi non compensatori*

- I metodi non compensatori non consentono che le prestazioni positive di un criterio compensino le prestazioni negative di un altro.
- Ogni criterio è preso in considerazione isolatamente.
- Definizione:
  $a_i$ è "dominata" se esiste (nell'insieme $A$) almeno un'altra alternativa $a_j$ che dà una prestazione migliore di $a_i$ in almeno un criterio e prestazioni non peggiori di $a_i$ nei criteri rimanenti.

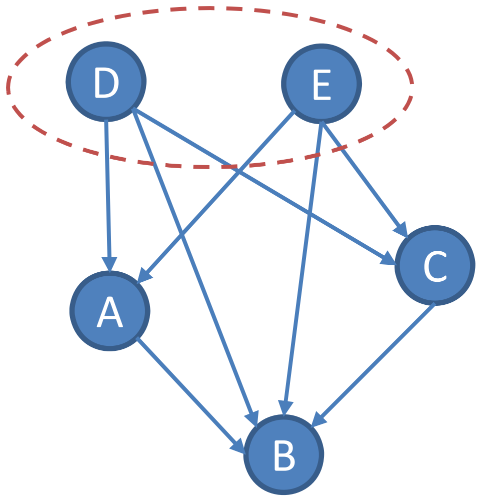
- Si supponga che quattro alternative siano valutate rispetto a cinque criteri tutti espressi con una scala a dieci punti (dove 10 è il punteggio maggiore).

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Alternativa A | 8 | 6 | 7 | 9 | 7 |
| Alternativa B | 7 | 6 | 6 | 8 | 7 |
| Alternativa C | 4 | 7 | 3 | 5 | 4 |
| Alternativa D | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 |

- L'alternativa A domina B e D; C non è dominata. Tuttavia le prestazioni di C sono nel complesso peggiori di quelle di B, eccettuato il punteggio nel criterio C2.

- Esempio: si intende affittare uno strumento di test di cui sono valutate affidabilità dei risultati (Aff), impatto sul livello di servizio (ILS) e costo annuale (CA); ci sono cinque alternative.

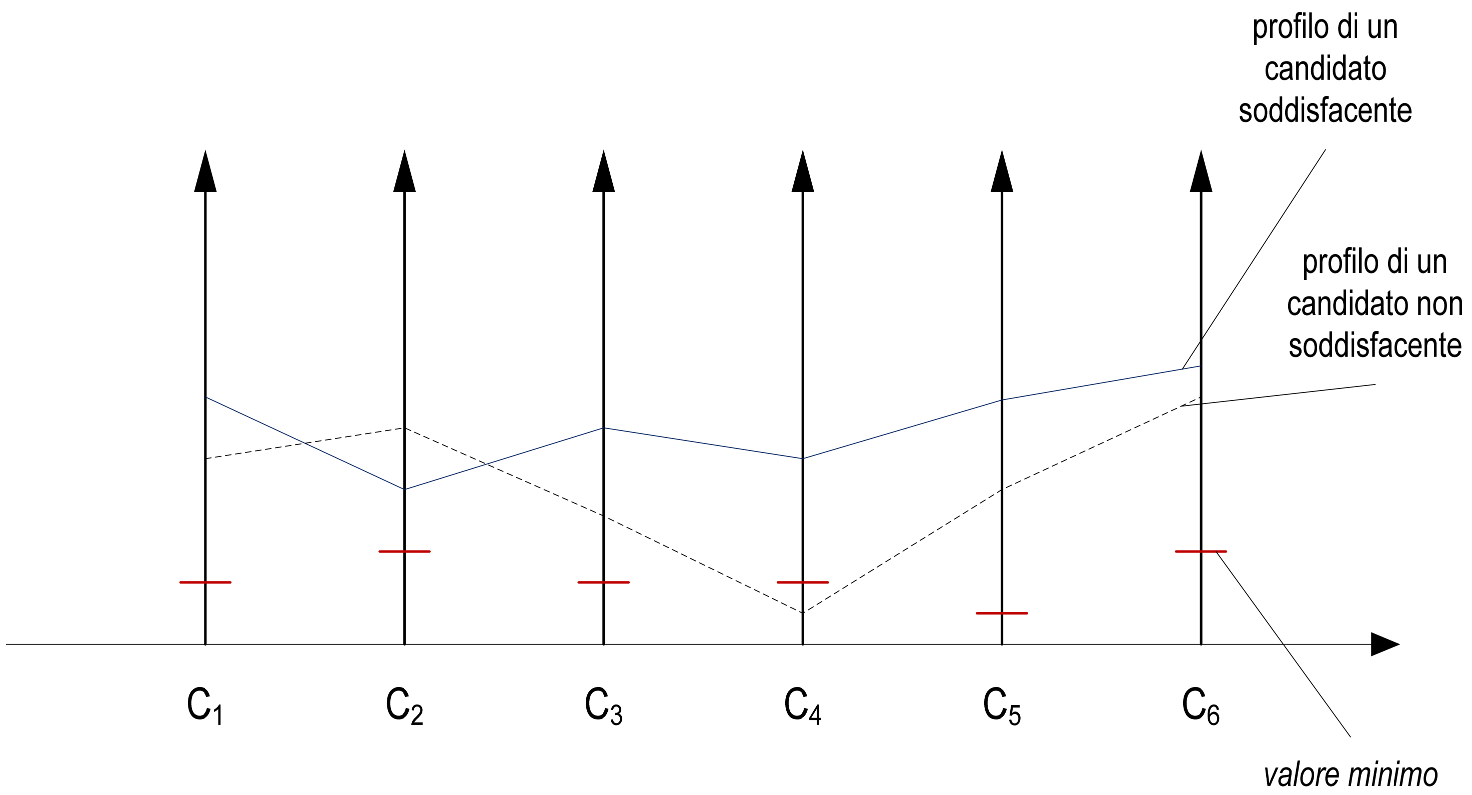
| | Aff | ILS | CA |
|---|---|---|---|
| Alternativa A | Discreta | Medio | 25 |
| Alternativa B | Discreta | Elevato | 27 |
| Alternativa C | Buona | Medio | 27 |
| Alternativa D | Ottima | Basso | 24 |
| Alternativa E | Buona | Medio | 22 |



- Alcuni metodi non compensatori sono utilizzati non per individuare un’azione preferibile, ma per identificare un insieme di azioni o candidati che manifestino delle *prestazioni ritenute soddisfacenti* rispetto a *ogni* criterio.
- Nel *metodo congiuntivo* si fissano dei *valori minimi* per ogni criterio (sia J l’insieme di tutti gli attributi considerati):
  un’azione sarà considerata soddisfacente se le sue prestazioni sono superiori al valore minimo per *tutti* gli attributi considerati.

- Dato il valore minimo del criterio generico $j \in J$ ($x_j^0$), un'alternativa $a_i$ sarà soddisfacente se

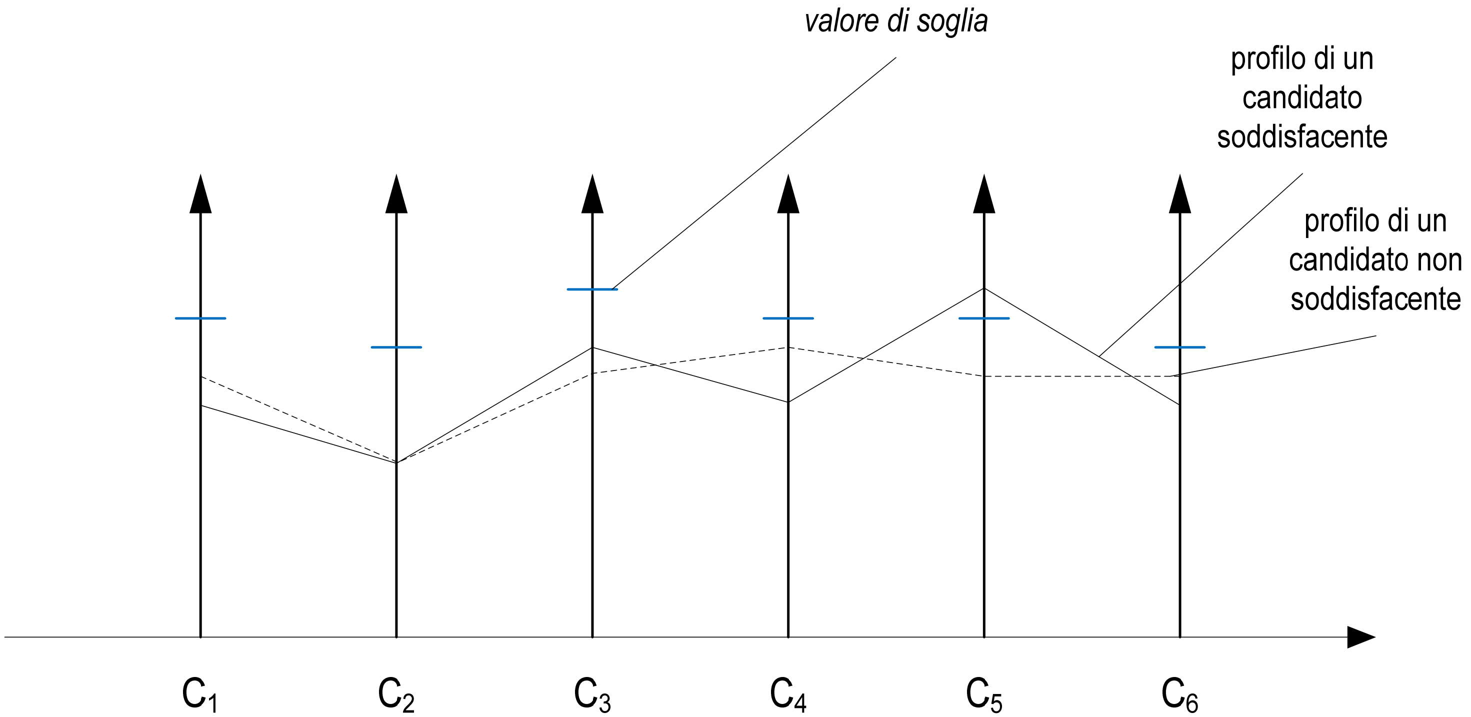
$$x_{ij} \geq x_j^0 \quad \forall j,\, j \in J$$



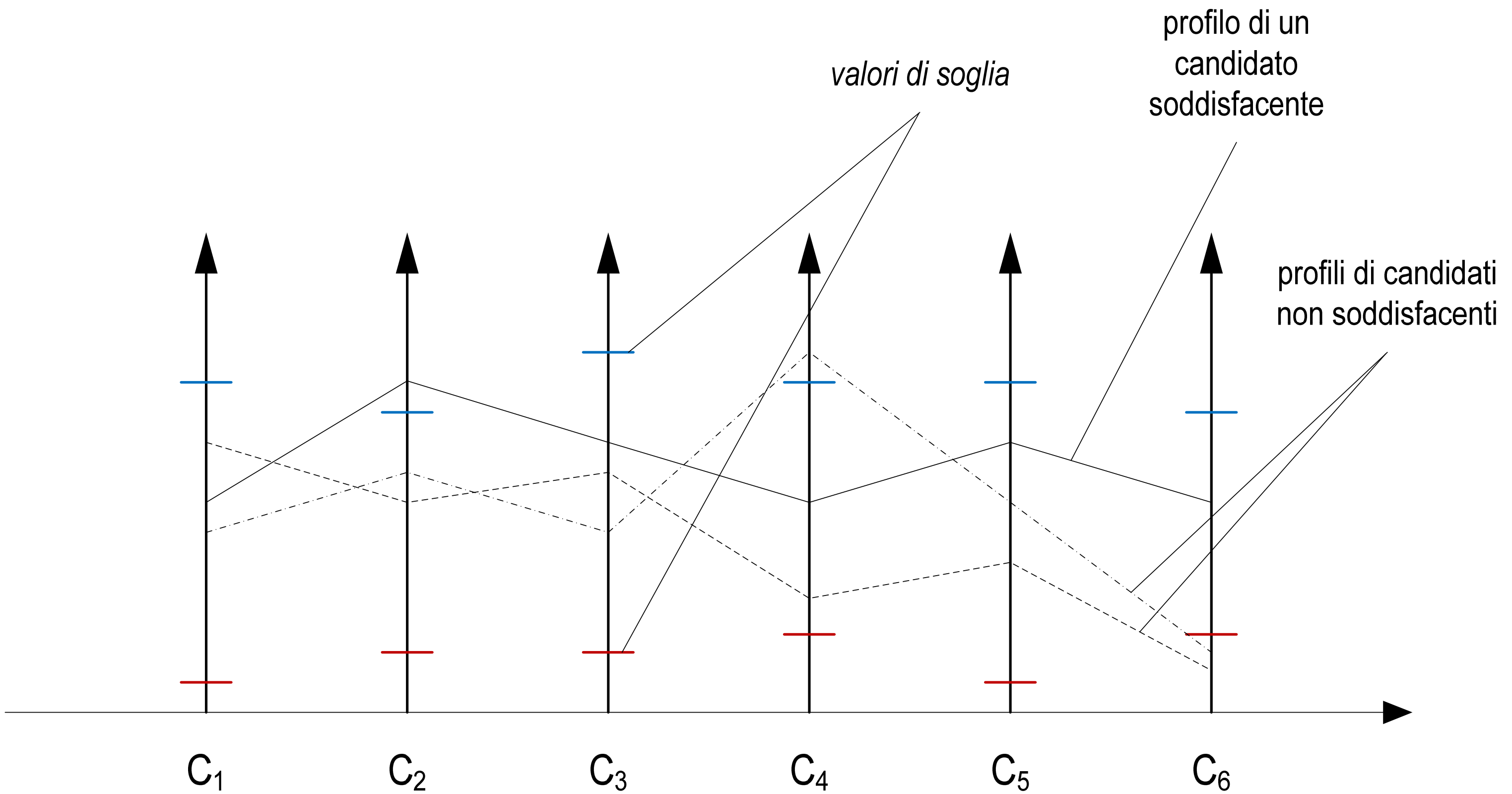
- Il *metodo disgiuntivo* valorizza la possibilità che un candidato offra una prestazione particolarmente buona *in almeno un criterio*.
- Questo approccio enfatizza l’eccellenza che un candidato può manifestare anche in un solo criterio.
- (Il metodo congiuntivo richiedeva valori di prestazione non inferiori ai limiti minimi per *tutto* l’insieme di criteri.)

- Dato il valore soglia dell'attributo generico $j \in J$ ($x_j^S$), un'alternativa $a_i$ sarà soddisfacente se

$$\exists j, j \in J : x_{ij} \geq x_j^S$$



- È possibile utilizzare insieme i due metodi per definire in modo più fine le condizioni che i candidati devono garantire per essere considerati soddisfacenti.



# *Domanda*

- È possibile pensare a un metodo non compensatorio che consenta di identificare l'alternativa (o le alternative) *più promettenti*?
- Potremmo ad esempio valutare le alternative criterio per criterio a partire da quelli che il decisore giudica «più importanti».

- Il *metodo Lessicografico* presuppone che l'importanza dei criteri per un decisore sia differente:
  può ad esempio esistere un criterio ritenuto fondamentale o critico per la decisione.
- Se esistono più alternative che soddisfano tale criterio, si potrà identificare un secondo criterio, meno importante del primo ma che il decisore reputa più importante degli altri ecc.

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| | **Aff** | **ILS** | **C** |
| Alternativa A | Buona | Medio | 25,0 |
| Alternativa B | Discreta | Elevato | 27,0 |
| Alternativa C | Buona | Medio | 27,0 |
| Alternativa D | Ottima | Basso | 24,0 |
| Alternativa E | Buona | Medio | 22,0 |
| Alternativa F | Ottima | Basso | 25,0 |
| Alternativa G | Ottima | Medio | 22,0 |
| Alternativa H | Buona | Basso | 24,0 |

# Osservazioni

- I criteri possono rilevare prestazioni *conflittuali* nelle alternative.
- Un modo per ottenere una prestazione «complessiva» (o «di sintesi») è *aggregare* i punteggi dei criteri.
- Il modo più semplice consiste nel sommare i punteggi, il che implica dare eguale importanza ai due criteri:

| | $g_1$ | $g_2$ | |
|---|---|---|---|
| Alternativa A | 8 | 4 | 12 |
| Alternativa B | 5 | 4 | 9 |
| Alternativa C | 3 | 8 | 11 |

# *Esempio*

- Il risultato è che ora una delle alternative appare meno soddisfacente delle altre e ce n'è una preferibile.
- Se il decisore ritiene però di pesare diversamente i due criteri si possono ottenere risultati ancora diversi.
- Ad esempio:

| | $g_1$ | $g_2$ | |
|---|---|---|---|
| | 0,4 | 0,6 | |
| Alternativa A | 3,2 | 2,4 | 5,6 |
| Alternativa B | 2 | 2,4 | 4,4 |
| Alternativa C | 1,2 | 4,8 | 6 |

# *Osservazioni*

- Si noti che l'aggregazione in forma di somma consente di *compensare* le prestazioni dei criteri:

  l'alternativa C che presenta un basso punteggio nel criterio 1 compensa la sua *prestazione complessiva* grazie al punteggio relativo al criterio 2.
- I pesi relativi ai criteri determinano l'incidenza dei criteri sulla prestazione complessiva.
- Così, l'alternativa C che presenta 5 punti in meno della A nel criterio 1 (5×0,4=2) recupera in prestazione totale grazie ai 4 punti in più nel criterio 2 (4×0,6=2,4).

- In altri termini, quando i criteri contribuiscono *tutti allo stesso modo* alla prestazione totale (stessa scala e stessi pesi), si può «cedere» un'unità di un criterio per ottenere un'unità di un altro senza perdere in prestazione totale.
- Nel caso le scale siano diverse o siano diversi i pesi, si dovrà determinare il valore di un'unità del criterio che si decrementa esprimendola nelle unità di quello che si incrementa (*compromesso* o *trade-off*).
- Tale «fattore di conversione» è solitamente chiamato *tasso di sostituzione*.

- Il tasso di sostituzione tra due criteri $c_j$ e $c_h$ nel punto

$$\mathbf{c}^0=(c_1{}^0, c_2{}^0, \ldots, c_n{}^0)$$

- è la variazione $r_{j,h}$ nel criterio $c_j$ per cui l'alternativa caratterizzata da $\mathbf{c}^0$ è indifferente all'alternativa caratterizzata dal vettore

$$(c_1{}^0, c_2{}^0, \ldots, c_j{}^0+\mathrm{r}_{j,h}, \ldots, c_h{}^0-1, \ldots, c_n{}^0)$$

- Si dimostra che nel caso della somma pesata semplice si ha $r_{j,h}=w_h/w_j$ dove $w_i$ sono i pesi dei criteri.
- Infatti la prestazione complessiva di un'alternativa 0
  [..., $w_j \cdot c_j$, ..., $w_h \cdot c_h$, ...]
  è equivalente alla prestazione complessiva di un'alternativa 1
  [..., $w_j \cdot (c_j + r_{j,h})$, ..., $w_h \cdot (c_h - 1)$, ...]:

$$w_j \cdot c_j + w_h \cdot c_h = w_j \cdot (c_j + r_{j,h}) + w_h \cdot (c_h - 1)$$

$$0 = w_j \cdot r_{j,h} - w_h$$

$$r_{j,h} = \frac{w_h}{w_j}$$

# *Simbologia utilizzata*

- Si considerino i seguenti elementi:
  - A: $(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n)$
    insieme delle alternative ammissibili
  - I: (1, 2, ..., k, ..., m)
    insieme degli indici degli m criteri $g_k(.)$
  - W: $(w_1, w_2, ..., w_k, ..., w_m)$
    insieme dei pesi attribuiti ai criteri
  - $g_k(a_i)$ valutazione di $a_i$ rispetto a $g_k$

| | $g_1$ | … | $g_k$ | … | $g_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | $g_1(a_i)$ | … | $g_k(a_i)$ | … | $g_m(a_i)$ |

- Per semplificare i calcoli, si possono assegnare dei pesi che abbiano valori compresi tra 0 e 1 e che rispettino la seguente relazione:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k = 1$$

# *Metodi compensatori*

- I metodi basati su *funzioni di utilità* (o di *valore*) prevedono la costruzione di una funzione di sintesi la cui forma generale è

$$V(a_1,\ldots,a_m) = f[v_1(a_1),\ldots,v_m(a_m)]$$

- Si tratta quindi di stabilire le funzioni per ogni attributo e la funzione di sintesi attraverso la ricostruzione delle preferenze del decisore.

- Nei metodi classici ciò avviene attraverso l’esplicitazione dei compromessi accettabili per il decisore.
- I metodi della somma o del prodotto pesato sono a tutti gli effetti dei casi particolari di *funzioni di utilità*.

# *Metodo della somma pesata*

- La somma pesata è un modello additivo nella forma:

$$V(a) = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot g_k(a)$$

- Si assegna un valore di sintesi all'alternativa *a* a partire dal «valore» assegnato ad essa in ogni criterio k.

# Esempio 2

- Quattro fornitori di servizi manutentivi sono stati valutati secondo 4 criteri:
  - $g_1$: costi fissi annuali di fornitura
  - $g_2$: affidabilità del servizio (punteggio da 0 a 100)
  - $g_3$: prestazioni aggiuntive del servizio (punteggio da 0 a 100)
  - $g_4$: flessibilità del servizio (punteggio da 0 a 100)

- Si sono attribuite le valutazioni:

| | $g_1$<br>5 | $g_2$<br>3 | $g_3$<br>1 | $g_4$<br>1 |
|---|---|---|---|---|
| *a_1* | -10 | 30 | 72 | 30 |
| *a_2* | -13 | 58 | 48 | 70 |
| *a_3* | -21 | 70 | 65 | 85 |
| *a_4* | -22 | 80 | 75 | 75 |

# *Osservazioni*

- Si può trasformare la matrice in una normalizzata con valori in colonna tra 0 e 1.
- Ciò è richiesto se le scale di valutazione sono diverse sostanzialmente (o hanno ordini di grandezza diversi).
- Esempio 2 (criterio 2), se $g_k'(a_i)$ è il valore normalizzato:

$$g_k'(a_i) = \frac{g_k(a_i) - 30}{80 - 30}$$

- In alternativa si può considerare il rapporto tra $g_k(a_i)$ e il valore massimo.
- Anche i pesi possono essere normalizzati in modo che la loro somma sia pari a 1.

- Con la normalizzazione, si ottengono i valori seguenti:

| | 1 c_fissi | 2 affidab | 3 prestaz | 4 flessib | V(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | |
| a_1 | 1,00 | 0,00 | 0,89 | 0,00 | 0,59 |
| a_2 | 0,75 | 0,56 | 0,00 | 0,73 | 0,62 |
| a_3 | 0,08 | 0,80 | 0,63 | 1,00 | 0,44 |
| a_4 | 0,00 | 1,00 | 1,00 | 0,82 | 0,48 |

- La somma pesata nella forma: $V(a_i) = \sum_{k=1}^{4} w_k \cdot g_k'(a_i)$ individua il seguente ordinamento:

a_2 *P* a_1 *P* a_4 *P* a_3

- Sono possibili altre trasformazioni dei valori $g_k(a_i)$ da valori assoluti a valori relativi.
- Un metodo frequente è l’espressione della misura in termini del suo contributo al valore totale (somma dei valori rispetto a k):

$$g_k{}^*(a_i) = \frac{g_k(a_i)}{\sum_{j=1}^{n} g_k(a_j)}$$

- La matrice dei valori relativi è:

| | 1 c_fissi | 2 affidab | 3 prestaz | 4 flessib | V(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | |
| a_1 | -0,152 | 0,126 | 0,277 | 0,115 | 0,0013 |
| a_2 | -0,197 | 0,244 | 0,185 | 0,269 | 0,0200 |
| a_3 | -0,318 | 0,294 | 0,250 | 0,327 | -0,0132 |
| a_4 | -0,333 | 0,336 | 0,288 | 0,288 | -0,0081 |

- La somma pesata nella forma: $V(a_i) = \sum_{k=1}^{4} w_k \cdot g_k^{*}(a_i)$ individua il seguente ordinamento:

a_2 *P* a_1 *P* a_4 *P* a_3

# *Metodi del prodotto pesato*

- I *metodi del prodotto* pesato prevedono diversi modelli.
- Si può adottare un modello basato sul confronto tra due alternative; si può ad esempio usare il prodotto:

$$R(a_i, a_j) = \prod_{k=1}^{m} \left( \frac{g_k(a_i)}{g_k(a_j)} \right)^{w_k}$$

- Nel caso siano presenti valori di costo (o valutati negativamente), si dovranno usare dei *proxy* che riportino i valori in accordo con le altre scale.
- Ad esempio, si può usare il proxy

$$g_k{}^{\circ}(a_i) = \frac{1}{g_k(a_i)}$$

- La matrice dei valori sarà ora:

| | 1 c_fissi | 2 affidab | 3 prestaz | 4 flessib |
|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| a_1 | 0,100 | 30 | 72 | 30 |
| a_2 | 0,077 | 58 | 48 | 70 |
| a_3 | 0,048 | 70 | 65 | 85 |
| a_4 | 0,045 | 80 | 75 | 75 |

- Considerati i rapporti R, un valore $R(a_i,a_j) \geq 1$ indica che $a_i$ è preferibile a $a_j$. La migliore alternativa sarà quella che è migliore o uguale a ogni altra.

- Nel nostro esempio otteniamo:

| | 1 c_fissi | 2 affidab | 3 prestaz | 4 flessib | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | |
| a1,a2 | 1,30 | 0,52 | 1,50 | 0,43 | 0,90 |
| a1,a3 | 2,10 | 0,43 | 1,11 | 0,35 | 1,02 |
| a1,a4 | 2,20 | 0,38 | 0,96 | 0,40 | 1,00 |
| a2,a3 | 1,62 | 0,83 | 0,74 | 0,82 | 1,14 |
| a2,a4 | 1,69 | 0,73 | 0,64 | 0,93 | 1,12 |
| a3,a4 | 1,05 | 0,88 | 0,87 | 1,13 | 0,98 |

- a2 è sempre superiore, la seconda è a1, a4 è superiore ad a3, a3 è la meno preferibile.

- Il vantaggio di questo modello è che la sua struttura porta direttamente ad un confronto tra grandezze (R) adimensionali.
- Si possono quindi evitare i problemi dovuti a unità di misura diverse (normalizzazione) o a diversi ordini di grandezza per i $g_k(a)$.
- Il modello dà lo stesso risultato se applicato ai valori relativi $g_k^*(a)$.

- Una forma più semplice (non adimensionale) del metodo utilizza il modello:

$$P(a_i) = \prod_{k=1}^{m} \left[ g_k(a_i) \right]^{w_k}$$

- Nel nostro Esempio 2 otteniamo:

| | |
|---|---|
| a_1 | 1,891 |
| a_2 | 2,112 |
| a_3 | 1,848 |
| a_4 | 1,882 |

- Da cui risulta l'ordinamento:

a_2 *P* a_1 *P* a_4 *P* a_3