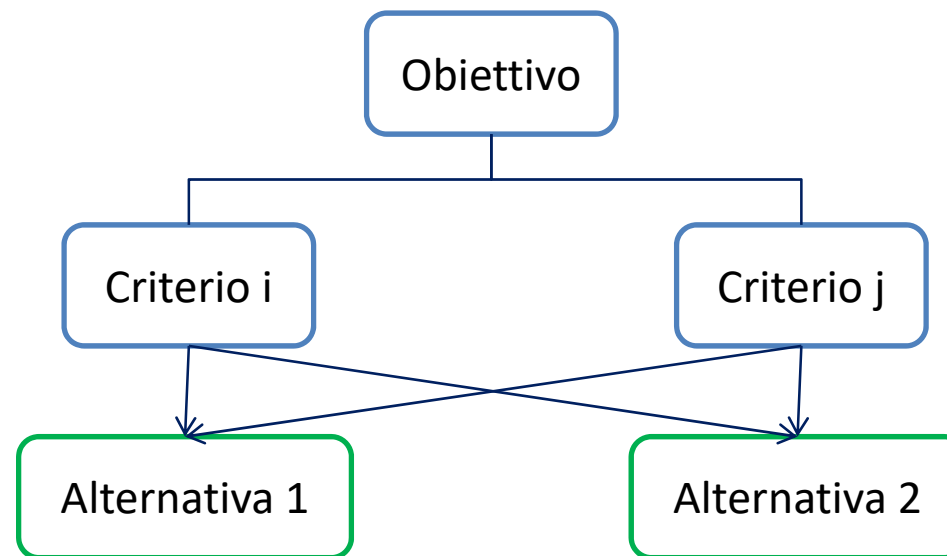


Analytic Hierarchy Process

- Il metodo AHP, sviluppato da Thomas L. Saaty a partire dalla fine degli anni '70 è diffuso a livello internazionale grazie alla sua (relativa) semplicità applicativa.
- Esso è fondato su un approccio analitico e sintetico che facilita la comunicazione tra gli attori interessati dal processo decisionale.

- Le informazioni sono strutturate in una gerarchia di criteri e alternative.
- Le informazioni sono poi sintetizzate per determinare l'importanza relativa delle alternative.
- Si possono confrontare sia criteri qualitativi sia criteri quantitativi, per mezzo di giudizi basati su informazioni, per ottenere pesi e priorità.

- La gerarchia si ramifica dall'obiettivo principale della decisione per giungere alle alternative: ogni oggetto di un livello superiore è in relazione con due o più oggetti di livello inferiore.
- Gli oggetti di un livello possono essere raggruppati in «cluster» (ad es. gruppi di criteri).
- Questa struttura consente quindi di ricondurre ogni oggetto all'obiettivo principale (sintesi).



- Il metodo suggerisce di non compiere le valutazioni in modo «globale» (ad esempio assegnando immediatamente a tutte le alternative un punteggio rispetto a un criterio).
- È preferibile concentrare l'attenzione sul confronto tra una coppia di oggetti (nodi) di livello inferiore ($i+1$) rispetto a un oggetto (nodo) di livello superiore (i).
- La struttura stessa del modello condurrà infine alla valutazione di sintesi di tutti gli oggetti del livello $i+1$.

Esempio D

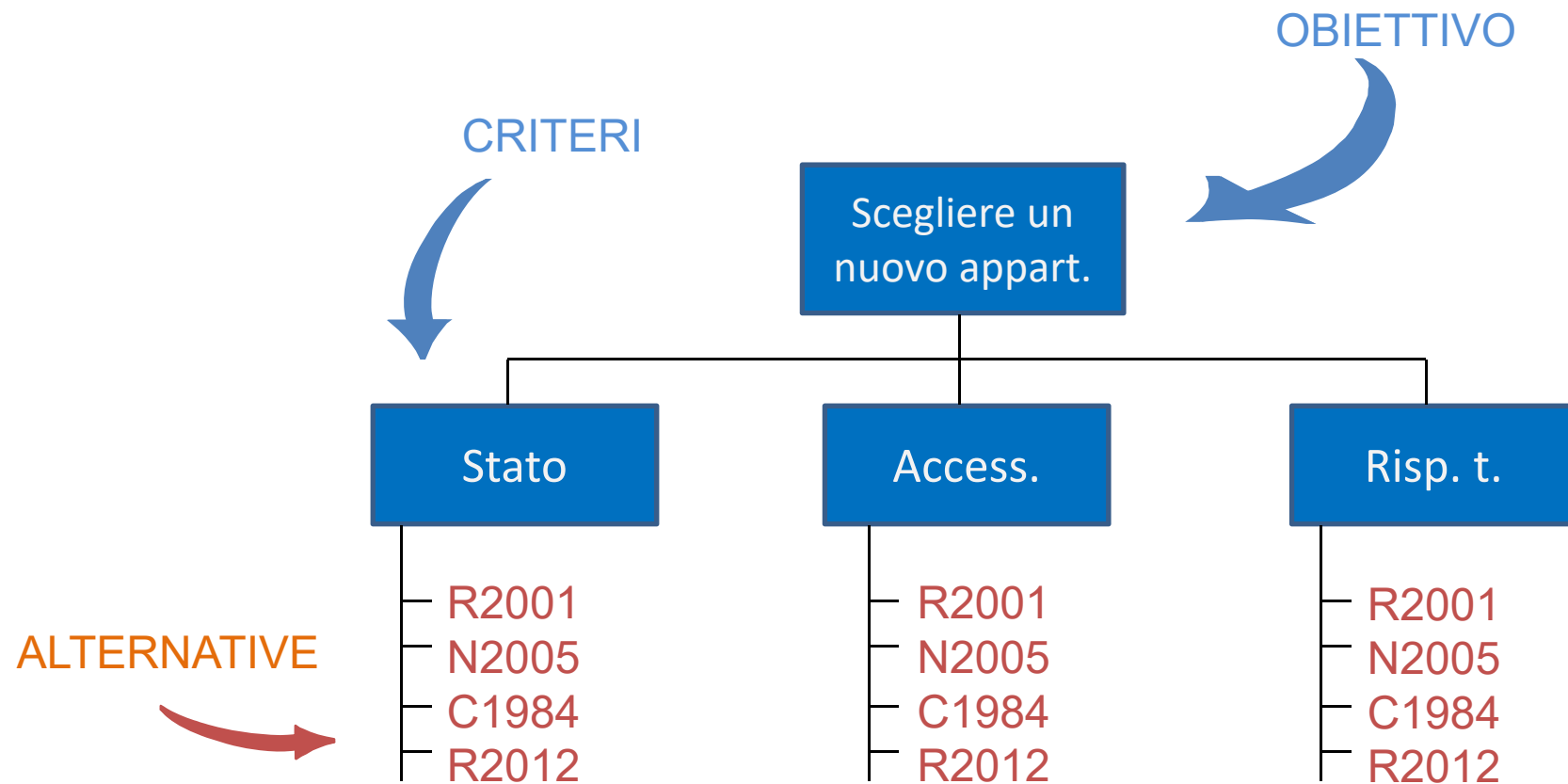
- Una giovane coppia vive e lavora in una media città ed è proprietaria di un mini appartamento, ubicato nell'estrema periferia.
- Intende vendere l'attuale appartamento ed acquistarne uno più ampio, tenuto conto dei seguenti criteri:
 - «Stato»: caratteristiche dell'appartamento, stato di manutenzione, stato impianti;
 - «Access.»: accessibilità ai servizi e al centro cittadino
 - «Risp. t.»: risparmio tempo di viaggio casa-lavoro rispetto all'attuale
 - «Prezzo»: prezzo d'acquisto

- Le soluzioni identificate si concentrano su quattro appartamenti bicamere (tra 75 e 90mq) con le seguenti caratteristiche:

	Risp. t. (min)	Prezzo (k€)
R2001	25	120
N2005	15	150
C1984	10	90
R2012	20	180

- Una parte importante del processo è lo sviluppo di tre passi:
 1. Stabilire l'obiettivo:
scegliere un nuovo appartamento
 2. Definire i criteri:
stato, accessibilità, risparmio tempo di viaggio
 3. Definire le alternative:
R2001, N2005, C1984, R2012
- I costi possono essere inclusi tra i criteri, ma Saaty suggerisce di trattarli successivamente.

- Le informazioni sono poi organizzate secondo un albero gerarchico.



Importanza dei criteri e priorità delle alternative

- Si potrebbe inizialmente stabilire un ordinamento dei criteri:
«penso che l'accessibilità sia il criterio più importante, poi viene lo stato; il risparmio di tempo è il criterio meno importante»
- Si può poi usare il rapporto (quoziente) tra ogni coppia di criteri per stimare l'importanza relativa tra i due:
 - l'accessibilità è 2 volte più importante dello stato
 - lo stato è 3 volte più importante del risparmio di t.

- Queste informazioni consentono di ricavare anche la relazione:
«l'Accessibilità è 6 volte più importante del Risparmio di tempo.»
- Da questi quozienti si può ricavare l'importanza relativa a livello globale di ogni criterio.
- In presenza di molti criteri o alternative è però difficile garantire una perfetta coerenza dei giudizi.

- Il metodo consente
 - di attribuire un valore di prestazione a ogni nodo a_i di un livello (o di cluster) *oppure*
 - di eseguire dei confronti tra coppie di nodi rispetto allo stesso nodo di livello superiore (focus).
- Nel primo caso si assegnano dei valori numerici che sono trasformati in valori relativi di priorità (*scala rapporto*).
- Tali valori relativi sono ottenuti dividendo ogni valore numerico per la somma dei valori numerici di tutti gli oggetti del cluster.

- Nel secondo caso le valutazioni sono espresse per mezzo di giudizi verbali.
- Tali giudizi sono codificati in una forma numerica che esprime il rapporto tra le priorità relative degli oggetti confrontati.
- Data una coppia ordinata di oggetti (a_i, a_j) di un livello, il decisore esprime un giudizio di confronto (a_{ij}) :

$$a_{ij} = 1/a_{ji}, \quad \text{tale che } a_{ii} = 1 \quad \forall i$$

- Saaty propone una scala numerica da 1 a 9:

Valore numerico	Giudizio verbale (a_i, a_j)	Interpretazione
1	a_i e a_j sono ugualmente importanti	I due oggetti sono ugualmente importanti rispetto al nodo genitore.
3	a_i è moderatamente più importante di a_j	L'esperienza e i giudizi del decisore orientano la sua valutazione leggermente a favore di a_i .
5	a_i è fortemente più importante di a_j	L'esperienza e i giudizi del decisore orientano la sua valutazione fortemente a favore di a_i .
7	a_i è evidentemente più importante di a_j	L'esperienza e i giudizi del decisore orientano la sua valutazione fortemente a favore di a_i e tale valutazione è dimostrata nella pratica.
9	a_i è estremamente più importante di a_j	La dominanza di a_i su a_j è dimostrata ed è la più alta possibile.
2-4-6-8	Giudizi intermedi	Sono assegnati come misure di compromesso.

- Assegnando i giudizi, si ottiene una matrice reciproca M.
- Nell'esempio D si è ricavata una matrice nella forma:

	STATO	ACCESS.	RISP. T.
STATO	1/1	1/2	3/1
ACCESS.	2/1	1/1	4/1
RISP. T.	1/3	1/4	1/1

$a_{21} = 1/a_{12}$

- L'assegnazione diretta delle priorità, ad esempio attraverso misure di indicatori, garantisce la consistenza dei giudizi relativi a tutti gli elementi del livello in quanto i rapporti tra i valori assegnati sono ricavati dalle misure.
- Date le misure del livello k (w_1, w_2, \dots, w_n), si ha ad esempio:

$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{w_2}{w_3}$$

- Tuttavia l'utilizzo di misure di questo tipo potrebbe non esprimere l'effettiva importanza relativa (per il decisore) degli oggetti del livello rispetto al focus.

- I confronti a coppie consentono di focalizzare l'attenzione, per ogni valutazione, sui due oggetti confrontati.
- Le priorità relative del cluster sono ricavate sulla base di $n(n-1)/2$ valutazioni e quindi si basano su una *ridondanza di informazioni* relative alle preferenze del decisore.
- Si possono manifestare però problemi di consistenza.

- Se

- a_{ij} è il giudizio del decisore nel confronto della coppia ordinata (a_i, a_j) rispetto al focus
- w_i è la priorità relativa ottenuta per a_i ,

alla fine del processo di interazione decisore-modello si avrà un vettore delle priorità per tutti gli oggetti del livello:

$$\mathbf{w} = \left[w_1, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_n \right]$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

- Se i giudizi sono perfettamente consistenti, come nel caso di valori ricavati dall'assegnazione diretta di misure, dato il livello generico (e la corrispondente matrice reciproca M) si ha:

$$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$$

$$a_{ik} \cdot a_{kj} = \frac{w_i}{w_k} \cdot \frac{w_k}{w_j} = \frac{w_i}{w_j} = a_{ij}$$

- In questo caso è sufficiente normalizzare una qualunque colonna di M per ricavare la priorità relativa di ogni oggetto del livello:

$$w_i = \frac{a_{ij}}{\sum_k a_{kj}}$$

matrice «consistente»
(ipotetica)

	stato	access.	risp.t.
stato	1	1/2	3
access.	2	1	6
risp.t.	1/3	1/6	1



	stato	access.	risp.t.
stato	0,3	0,3	0,3
access.	0,6	0,6	0,6
risp.t.	0,1	0,1	0,1

↓	↓	↓
3,33	1,67	10,00

	stato	access.	resp.t.		
stato	1,000	0,500	3,000	4,500	0,300
access.	2,000	1,000	6,000	9,000	0,600
resp.t.	0,333	0,167	1,000	1,500	0,100
	3,333	1,667	10,000	15,000	

- In una matrice consistente la somma dei valori di riga corrispondenti all'elemento A, normalizzata rispetto al loro totale, indica quanto l'elemento A «domina» gli altri in termini relativi.
- La somma dei valori della colonna, corrispondenti all'elemento A, indica quanto esso «è dominato» dagli altri elementi.

- Quando la matrice dei confronti a coppie è perfettamente consistente, le priorità relative (vettore \mathbf{w}) si possono ottenere:
 - normalizzando i valori di una qualunque colonna (rapporto tra valore di colonna e somma di colonna)
 - sommando i valori di riga e normalizzando rispetto al totale delle righe.
- Utilizzando i confronti a coppie, non è facile mantenere una perfetta consistenza dei giudizi.
- Saranno presenti degli scostamenti che portano a priorità diverse al variare della colonna di M scelta.

- Nell'esempio D la matrice dei confronti a coppie tra criteri è:

	stato	access.	risp.t.
stato	1,000	0,500	3,000
access.	2,000	1,000	4,000
risp.t.	0,333	0,250	1,000

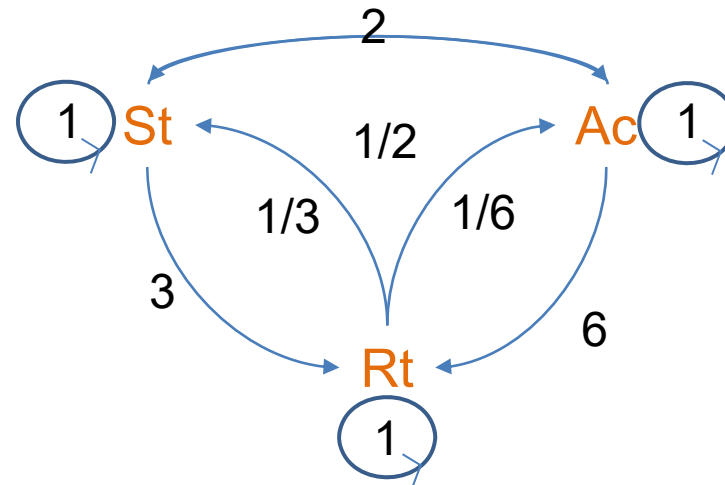
- La normalizzazione per colonne dà il seguente risultato:

	stato	access.	risp.t.
stato	0,300	0,286	0,375
access.	0,600	0,571	0,500
risp.t.	0,100	0,143	0,125

- Nel caso di matrice non perfettamente consistente, Saaty, per stimare il vettore w , propone due metodi:
 - *approssimato*: normalizzare i valori per colonne, addizionare le righe e normalizzare rispetto al totale
 - *esatto*: elevare la matrice a potenza consecutivamente e normalizzando le somme dei valori di riga.
- Questi due metodi sono basati su una stima e sul calcolo esatto dell'*autovettore principale* della matrice.

- Si osservi che in una matrice perfettamente consistente ogni confronto a coppie (a_{ij}) può essere ottenuto indirettamente attraverso «percorsi» alternativi:

	stato	access.	resp.t.
stato	1	1/2	3
access.	2	1	6
resp.t.	1/3	1/6	1



- L'autovettore costituisce un valore medio delle priorità basato su tutti i percorsi possibili che attraversano i valori dei confronti a coppie.

- Nell'esempio D, con il primo metodo si ottiene:

	stato	access.	risp.t.		w
stato	0,300	0,286	0,375	0,961	0,320
access.	0,600	0,571	0,500	1,671	0,557
risp.t.	0,100	0,143	0,125	0,368	0,123
				3,000	

- Il secondo metodo richiede una procedura per il calcolo dell'autovettore.

Ricavare l'autovettore

- Una procedura di calcolo breve per ottenere w consiste nell'elevare al quadrato la matrice simmetrica diverse volte successivamente.
- Si calcolano i totali di riga e si normalizzano.
- L'algoritmo di calcolo termina quando le differenze tra i totali ottenuti da due cicli consecutivi sono inferiori a un valore prestabilito.

	STATO	ACCESS.	RISP. T.
STATO	1/1	1/2	3/1
ACCESS.	2/1	1/1	4/1
RISP. T.	1/3	1/4	1/1

Lasciamo da parte le etichette dei criteri ed esprimiamo le frazioni in numeri decimali:



1,0000	0,5000	3,0000
2,0000	1,0000	4,0000
0,3333	0,2500	1,0000


PASSO 1: Innalzamento al quadrato della matrice

QUESTA PER



1,0000	0,5000	3,0000
2,0000	1,0000	4,0000
0,3333	0,2500	1,0000

QUESTA



1,0000	0,5000	3,0000
2,0000	1,0000	4,0000
0,3333	0,2500	1,0000

I.E. $(1,0000 * 1,0000) + (0,5000 * 2,0000) + (3,0000 * 0,3333) = 3,0000$

DÀ QUESTA



3,0000	1,7500	8,0000
5,3332	3,0000	14,0000
1,1666	0,6667	3,0000

PASSO 2 : Ora, calcoliamo il primo autovettore (approssimato alla quarta cifra decimale)

PRIMO, SOMMIAMO LE RIGHE

3,0000	+	1,7500	+	8,0000	=	12,7500	0,3194
5,3332	+	3,0000	+	14,0000	=	22,3332	0,5595
1,1666	+	0,6667	+	3,0000	=	4,8333	0,1211

SECONDO, SOMMIAMO I TOTALI DI RIGA

39,9165	1,0000
---------	--------

INFINE, NORMALIZZIAMO DIVIDENDO I TOTALI DI RIGA PER LA SOMMA TOTALE (AD ES. $12,7500 / 39,9165 = 0,3194$)

IL RISULTATO È IL NOSTRO AUTOVETTORE (UNA SLIDE SUCCESSIVA NE ILLUSTRERÀ IL SIGNIFICATO NEL CASO D'ESEMPIO)

0,3194
0,5595
0,1211

Questo processo dev'essere ripetuto finché l'autovettore ottenuto coincide con quello dell'iterazione precedente (Ricordiamo l'approssimazione alla quarta cifra dell'esempio)

CONTINUANDO IL NOSTRO ESEMPIO, DI NUOVO,
PASSO 1: ELEVIAMO AL QUADRATO QUESTA MATRICE

3,0000	1,7500	8,0000
5,3332	3,0000	14,0000
1,1666	0,6667	3,0000

CON
QUESTO
RISULTATO



27,6653	15,8330	72,4984
48,3311	27,6662	126,6642
10,5547	6,0414	27,6653

ANCORA PASSO 2 : CALCOLO DELL'AUTOVETTORE
(ALLA QUARTA CIFRA DECIMALE)

27,6653	+	15,8330	+	72,4984	=	115,9967	0,3196
48,3311	+	27,6662	+	126,6642	=	202,6615	0,5584
10,5547	+	6,0414	+	27,6653	=	44,2614	0,1220
						362,9196	1,0000
TOTALI							

CALCOLIAMO LE DIFFERENZE TRA QUESTO E L'AUTOVETTORE OTTENUTO NELL'ITERAZIONE PRECEDENTE:

0,3194	—	0,3196	=	- 0,0002
0,5595	—	0,5584	=	0,0011
0,1211	—	0,1220	=	- 0,0009

ALLA QUARTA CIFRA DECIMALE NON C'È GRANDE DIFFERENZA:
FERMIAMOCI QUI.

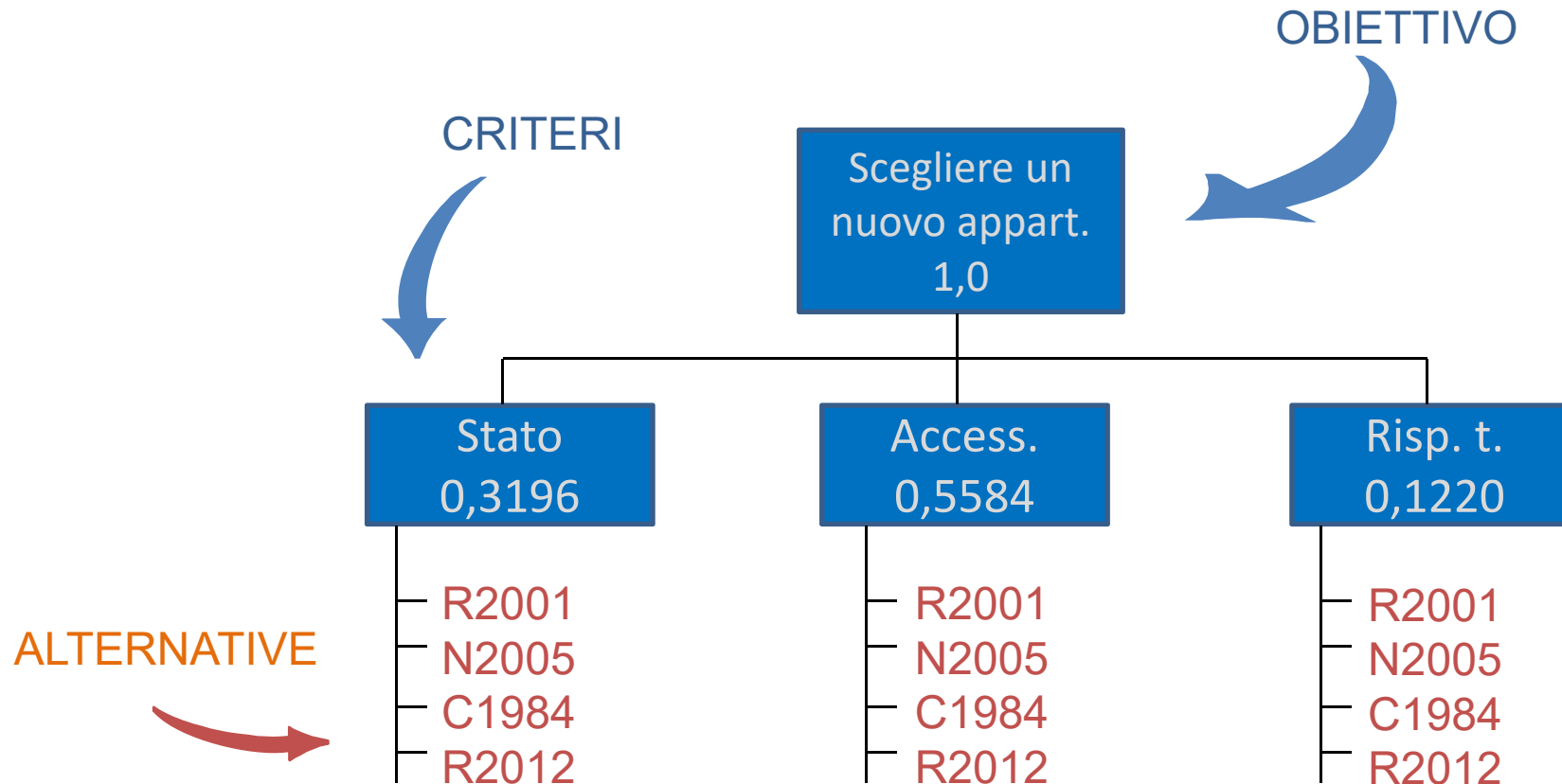
- Qual è il significato dell'autovettore?
- Ricordando la matrice di partenza:

	STATO	ACCESS.	RISP. T.
STATO	1/1	1/2	3/1
ACCESS.	2/1	1/1	4/1
RISP. T.	1/3	1/4	1/1

- L'autovettore ottenuto dà la graduatoria relativa dei criteri (cioè il loro ordinamento):

STATO	0,3196	← IL SECONDO CRITERIO PER IMPORTANZA
ACCESS.	0,5584	← IL CRITERIO PIÙ IMPORTANTE
RISP. T.	0,1220	← IL CRITERIO MENO IMPORTANTE

- La gerarchia con criteri e alternative è quindi:



- Per ottenere la priorità delle alternative il processo è analogo.

- Attraverso confronti a coppie si ricavano i valori della matrice reciproca relativa al livello delle alternative rispetto a ciascun nodo superiore:

STATO

	R2001	N2005	C1984	R2012
R2001	1/1	1/4	4/1	1/6
N2005	4/1	1/1	4/1	1/4
C1984	1/4	1/4	1/1	1/5
R2012	6/1	4/1	5/1	1/1

ACCESSIBILITÀ

	R2001	N2005	C1984	R2012
R2001	1/1	2/1	5/1	1/1
N2005	1/2	1/1	3/1	2/1
C1984	1/5	1/3	1/1	1/4
R2012	1/1	1/2	4/1	1/1

- Il calcolo dell'autovettore determina la graduatoria relativa delle alternative rispetto a ciascun criterio:

GRADUATORIA		STATO	GRADUATORIA		ACCESSIBILITÀ
3	R2001	0,1160	1	R2001	0,3790
2	N2005	0,2470	2	N2005	0,2900
4	C1984	0,0600	4	C1984	0,0740
1	R2012	0,5770	3	R2012	0,2570

- Il metodo AHP introduce una modalità di verifica della consistenza dei giudizi.
- All'autovettore principale è associato un autovalore massimo λ_{\max} .
- Si dimostra che nel caso di una matrice reciproca perfettamente consistente di ordine n : $\lambda_{\max} = n$.
- Per una matrice non perfettamente consistente sarà invece : $\lambda_{\max} > n$.
- Saaty propone l'indice di consistenza (CI):

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

- La valutazione di consistenza è fatta confrontando CI ottenuto dalla matrice dei confronti con quello pari alla media dei CI di un elevato numero di matrici dello stesso ordine (n) generate casualmente (RI_n).
- I valori dei RI_n sono forniti dall'autore:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

- Il rapporto CI/RI è chiamato rapporto di consistenza (CR).
- Si può ammettere un certo grado di inconsistenza, tuttavia il valore di CR dovrebbe essere inferiore a 0,1 (0,05 per matrici con $n=3$).

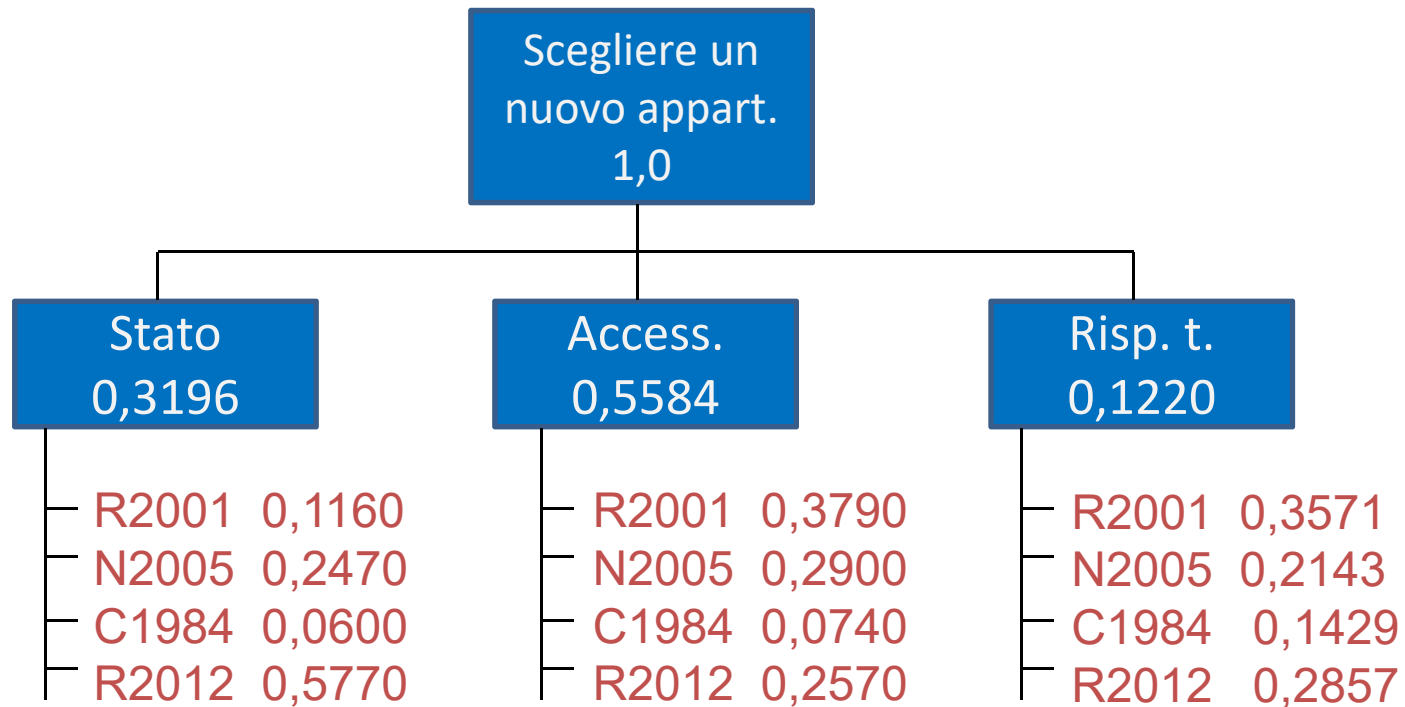
- Per quanto riguarda i risparmi di tempo, si può procedere allo stesso modo, oppure se siamo in possesso dei dati di risparmio per ogni alternativa si può utilizzare questa informazione:

	RISPARMI DI TEMPO (MINUTI)		
R2001	25	$25 / 70 =$	0,3571
N2005	15	$15 / 70 =$	0,2143
C1984	10	$10 / 70 =$	0,1429
R2012	20	$20 / 70 =$	0,2857
	<hr/>		<hr/>
	70		1,0000

La normalizzazione dei dati sui risparmi ci consente di utilizzarli con le altre graduatorie



- Il modello complessivo è quindi:



- Per i criteri «benefici» si ottiene:

	STATO	ACCESS.	RISP. T.		IMPORT.. CRITERI
R2001	0,1160	0,3790	0,3571	*	0,3196 STATO
N2005	0,2470	0,2900	0,2143		0,5584 ACCESSIBILITÀ
C1984	0,0600	0,0740	0,1429		
R2012	0,5770	0,2570	0,2857		0,1220 RISPARMIO TEMPO

Ad es. Per la "R2001" $(0,1160 * 0,3196) + (0,3790 * 0,5584) + (0,3571 * 0,1220) = 0,2923$

←	R2001	0,2923
=	N2005	0,2670
	C1984	0,0779
	R2012	0,3628

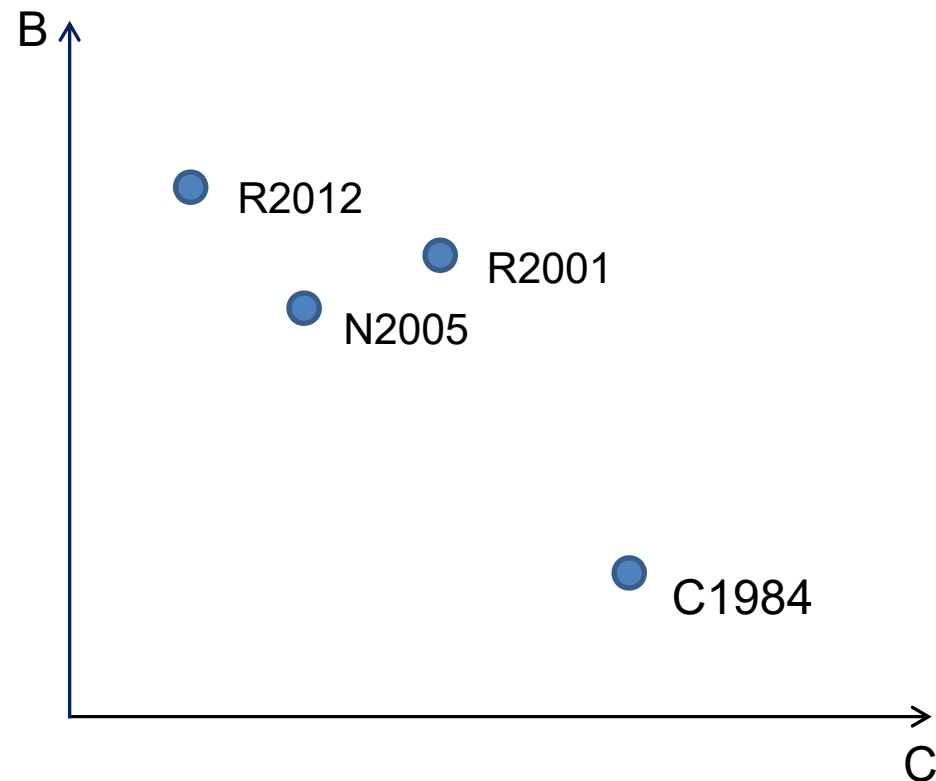
...L'APPARTAMENTO
R2012 HA IL PRIMO
POSTO IN
GRADUATORIA

Benefici e costi

- Saaty suggerisce che in molte decisioni complesse, i costi dovrebbero essere accantonati finché i benefici delle alternative non siano stati valutati.
- Discutere allo stesso tempo dei costi e dei benefici può infatti far nascere reazioni «politiche» o «emotive».
- Si tratta quindi di applicare un metodo per ottenere un giudizio finale dopo avere trattato i due elementi separatamente.

- Un possibile approccio è quello grafico (spazio Benefici-Costi) già visto per il metodo SMART.

	Costo	Costo norm.
1. R2012	180.000	0,3333
2. R2001	120.000	0,2222
3. N2005	150.000	0,2778
4. C1984	90.000	0,1667
	<hr/>	<hr/>
	540.000	1,0000



(Ricordiamo che i benefici sono stati ricavati prima con l'AHP.)

- In alternativa, si possono utilizzare:
 - il rapporto benefici-costi
 - metodi di programmazione lineare
 - separare l'albero gerarchico dei benefici da quello dei costi e poi combinare i risultati.
- Proviamo ad applicare il rapporto benefici-costi.

	COSTO	COSTO NORM.	RAPPORTI BENEFICI-COSTI
1. R2012	180.000	0,3333	$0,3628 / 0,3333 = 1,0883$
2. R2001	120.000	0,2222	$0,2923 / 0,2222 = 1,3152$
3. N2005	150.000	0,2778	$0,2670 / 0,2778 = 0,9613$
4. C1984	90.000	0,1667	$0,0779 / 0,1667 = 0,4675$
	<hr/>	<hr/>	
	540.000	1,0000	



- «R2001» è l'appartamento preferibile perché ha il più alto rapporto benefici–costi.

- Naturalmente non è conveniente eseguire i calcoli manualmente.
- Sono disponibili diversi software che implementano AHP.
- In particolare si suggerisce uno strumento gratuito:

SUPERDECISIONS (*www.superdecisions.com*)

- Esso consente di modellizzare il problema, di ricavare la priorità, di ottenere una misura della consistenza delle valutazioni e di eseguire l'analisi di sensibilità.