Metodi basati sul surclassamento

- Ricordiamo il caso d’esempio 2.
- Quattro fornitori di servizi manutentivi sono stati valutati secondo 4 criteri:
  - g1: costi fissi annuali di fornitura
  - g2: affidabilità del servizio (punteggio da 0 a 100)
  - g3: prestazioni aggiuntive del servizio (punteggio da 0 a 100)
  - g4: flessibilità del servizio (punteggio da 0 a 100)

- Le prestazioni ottenute sono le seguenti:

	g_1 5	g_2 3	g_3 1	g_4 1
a1	-10	30	72	30
a2	-13	58	48	70
a3	-21	70	65	85
a4	-22	80	75	75

Osservazioni

- Nessuna delle quattro alternative è *dominante*: confrontandole a coppie, nessuna è preferibile alle altre considerati tutti i criteri.
- In altri termini: $\neg\exists a^* \in A : g_k(a^*) \geq g_k(a_i) \quad \forall k \in I$

- Sarà opportuno individuare una relazione binaria diversa da quella di dominanza.
- Si può proporre una relazione di *surclassamento* (*outranking*).

Relazione di surclassamento

- Un'alternativa a_i surclassa a_j:
  - se in base alle informazioni che si possiedono sulle alternative e sulle preferenze dei decisori
  - ci sono elementi sufficienti per affermare che a_i ha prestazioni buone almeno quanto a_j sugli m criteri
  - e non ci sono elementi sufficienti per affermare il contrario.
- Simbolicamente ciò si indica con *a* S *b*.

- Si dovranno quindi individuare i criteri a supporto di tale affermazione.
- A favore di a_iSa_j ci sono i criteri k tali che

$$g_k(a_i) \geq g_k(a_j)$$

- Nell'esempio, per a_1 e a_2 il sottoinsieme I^+ è

$$C(a_1\ S\ a_2) = \{1,3\}$$

	g_1 5	g_2 3	g_3 1	g_4 1
a1	-10	30	72	30
a2	-13	58	48	70
a3	-21	70	65	85
a4	-22	80	75	75

- Considerando ciascun criterio come un voto, tale situazione vede 2 votanti su 4 a favore dell’affermazione a_1Sa_2.
- Generalizzando, si può valutare se la “coalizione” C(a_1Sa_2) è sufficientemente *importante* per poter affermare che, nel complesso, a_1Sa_2 (analisi di *concordanza*).
- Si noti che il peso di un criterio ne indica l’importanza all’interno della “coalizione” ma

  il concetto di compensazione non è chiamato in causa.

- Un osservatore potrebbe rilevare che pur essendoci più criteri concordi con l’affermazione a_1Sa_2, il criterio g_4 è particolarmente a favore di a_2:

$$g_4(a_2) - g_4(a_1) = 40$$

- Il criterio g_4 è *discordante* con la proposizione a_1Sa_2.
- Si potrebbe allora valutare se la differenza di prestazione sul criterio g_4 è sufficientemente grande da potere “indebolire” l’affermazione a_1Sa_2.

Metodi Electre

- Il metodo cerca di costruire sull'insieme A delle alternative una relazione S di *surclassamento* più ricca di una semplice dominanza.
- Il modello di preferenza globale ammette
  - *incomparabilità* tra alternative,
  - *non transitività*.
- L'incomparabilità si ha in situazioni in cui non esistono informazioni sufficienti per stabilire una situazione di chiara preferenza $a_i S a_j$ o $a_j S a_i$.

- Sono stati proposti diversi metodi Electre che dipendono dal problema decisionale da affrontare:
  - selezione alternative preferibili
  - ordinamento delle alternative
  - classificazione delle alternative
- Tuttavia la base comune è la costruzione della relazione di surclassamento a partire dai confronti a coppie.

	a_1		a_i		a_j		a_n
a_1	-						
		-					
a_i			-		(a_i,a_j)		
				-			
a_j			(a_j,a_i)		-		
						-	
a_n							-

- Confrontando una qualsiasi coppia (a_i,a_j) di alternative, si potranno individuare tre tipi di insiemi:
  - $I^+(i,j) = \{k \in I : g_k(a_i) > g_k(a_j)\}$
  - $I^=(i,j) = \{k \in I : g_k(a_i) = g_k(a_j)\}$
  - $I^-(i,j) = \{k \in I : g_k(a_i) < g_k(a_j)\}$

  allo stesso modo si individuano:

$$W^+(i,j) = \sum_k w_k \ , k \in I^+(i,j)$$

$$W^=(i,j) = \sum_k w_k \ , k \in I^=(i,j)$$

$$W^-(i,j) = \sum_k w_k \ , k \in I^-(i,j)$$

- Il metodo Electre I segue una serie di passi:
  - costruzione delle relazioni di surclassamento
  - tracciamento di un grafo di surclassamento
  - identificazione di un sottoinsieme delle alternative (N) detto *nucleo* (*kernel*).
- Il nucleo ha due proprietà:
  - tutte le a_j che non appartengono a N sono surclassate da almeno una $a_i \in N$
  - se $a_i \in N$, essa non è surclassata da altre $a_j \in N$

- Per costruire la relazione di surclassamento, si realizzano:
  - il test di concordanza
  - il test di discordanza
- Il test di concordanza calcola un indice di concordanza relativo a ogni coppia (a_i,a_j).
- $c(a_i,a_j)$ esprime il vantaggio che il decisore ha nello scegliere a_i e non a_j.

- Esso misura la frequenza relativa pesata dei criteri per i quali a_i non è peggiore di a_j:

$$c(i,j) = \frac{W^{+}(i,j) + W^{=}(i,j)}{W^{+}(i,j) + W^{=}(i,j) + W^{-}(i,j)}$$

- Se i pesi sono già espressi in termini relativi, è sufficiente considerare il numeratore.

Esempio

- Consideriamo (a_3,a_2):

	g_1 5	g_2 3	g_3 1	g_4 1
a2	-13	58	48	70
a3	-21	70	65	85

- $I^+(a_3,a_2) = \{2,3,4\}$ $\quad I^= = \varnothing$ $\quad I^- = \{1\}$
- $W^+(a_3,a_2) = 3+1+1=5$ $\quad W^= = 0$ $\quad W^- = 5$

$$c(3,2) = \frac{5+0}{5+0+5} = 0,5$$

Esempio

- Si ottiene la matrice di concordanza:

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	0,6	0,6	0,5
a_2	0,4	-	0,5	0,5
a_3	0,4	0,5	-	0,6
a_4	0,5	0,5	0,4	-

- Il test di discordanza è basato su un indice relativo a ogni coppia (a_i,a_j).
- $d(a_i,a_j)$ esprime il rammarico che il decisore ha nello scegliere a_i e non a_j.
- Rispetto alla coppia (a_i,a_j) si considerano tutti i criteri che appartengono a $I^-(a_i,a_j)$.
- Per ognuno di essi sarà $g_k(a_j) > g_k(a_i)$:
  si tratta di identificare il più "influente" fra essi, cioè la differenza che nella scala rispettiva è maggiore.

- Si calcolano quindi i quozienti tra le differenze “discordanti” e l’ampiezza della scala:

$$d(i, j) = \max_{k \in I^-} \frac{g_k(a_j) - g_k(a_i)}{\text{ampiezza criterio } (k)}$$

- Se $I^-(a_i,a_j)=\emptyset$ allora d(i,j)=0.
- In pratica d(i,j) misura la migliore prestazione “contro” a_i e “a favore” di a_j.

Esempio

- Consideriamo (a_3,a_4):

	g_1 5	g_2 3	g_3 1	g_4 1
a3	-21	70	65	85
a4	-22	80	75	75

- $I^+(a_3,a_4) = \{1,4\}$ $\quad I^= = \varnothing$ $\quad I^- = \{2,3\}$
- ampiezza g_2 = 80-30 = 50
- ampiezza g_3 = 75-48 = 27

Esempio

- ampiezza g_2 = 50
- ampiezza g_3 = 27
- $g_2(a_4) – g_2(a_3)$ = 80-70=10
- $g_3(a_4) – g_3(a_3)$ = 75-65=10

$$d(3,4) = \max\left(\frac{10}{50}, \frac{10}{27}\right) = 0{,}37$$

Esempio

- Si ottiene la matrice di discordanza:

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	0,727	1	1
a_2	0,889	-	0,630	1
a_3	0,917	0,667	-	0,370
a_4	1	0,750	0,182	-

- Si dirà quindi che $a_i S a_j$ se e solo se:
  1. i criteri di $I^+(a_i,a_j)$ sono sufficientemente importanti
  2. i criteri di $I^-(a_i,a_j)$ non sono abbastanza importanti da sfavorire la scelta di a_i.

- Fissata una "soglia" di concordanza c, la condizione 1 è $c(i,j) \geq c$.
- Fissata una "soglia" di discordanza d, la condizione 2 è $d(i,j) \leq d$.

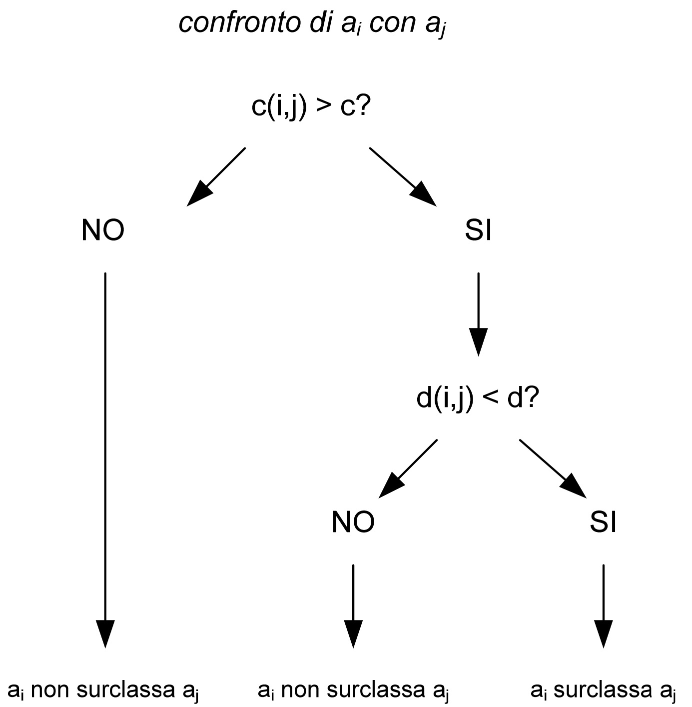
Osservazioni

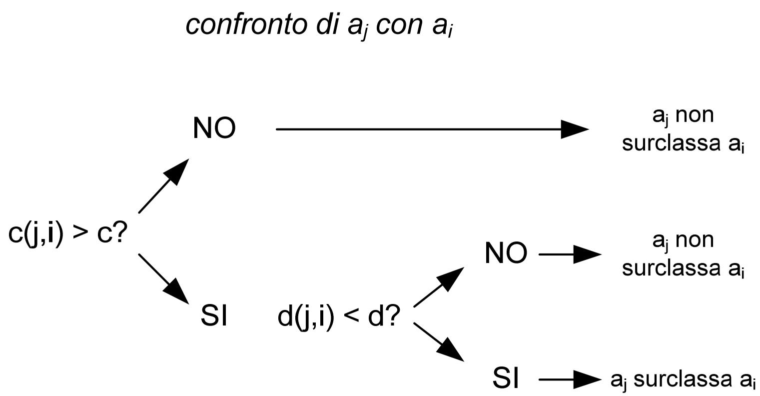
- La scelta dei valori di soglia è fatta dal decisore.
- c rappresenta la coalizione “minima” richiesta per favorire l’alternativa a_i e quindi assume valori maggiori o uguali a 0,5.
- A volte si adotta la “regola dei 2/3” e si assume c=0,66.
- Valori “grandi” di d (ad es., > 0,8) attenuano l’importanza di d(i,j).

- Per contro, valori “piccoli” di d (ad es. tra 0,5 e 0,6) indicano una maggiore esigenza, da parte del decisore, nel rifiutare possibili “cattive prestazioni” di a_i.
- Spesso di adotta, in prima battuta, un valore di d pari alla media delle d(i,j) (soglia “naturale”).
- Si possono adottare delle soglie “locali” per ogni criterio (t_k); in tal caso per la discordanza si adotta il modello seguente:

$$d(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } g_k(a_j) - g_k(a_i) > t_k \quad \forall k \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

- Il test di surclassamento tra a_i e a_j, è qui riassunto:





	a_i non surclassa a_j	a_i non surclassa a_j	a_i surclassa a_j
a_j non surclassa a_i	Incomparabili	Incomparabili	a_i S a_j
a_j non surclassa a_i	Incomparabili	Incomparabili	a_i S a_j
a_j surclassa a_i	a_j S a_i	a_j S a_i	a_i S a_j e a_j S a_i

Esempio

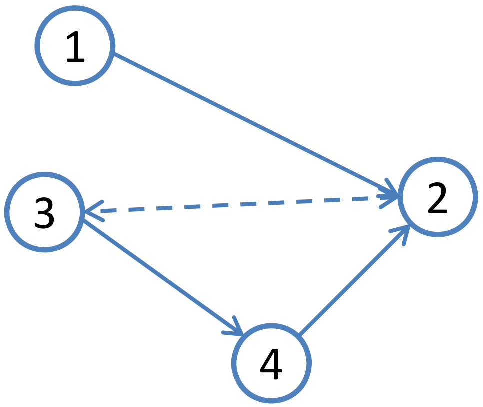
- Adottando c=0,5 e d=0,76 (media), si ricava una matrice globale:

$a_1 S a_2$

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	1	0	0
a_2	0	-	1	0
a_3	0	1	-	1
a_4	0	1	0	-

Esempio

- La matrice corrisponde al seguente grafo orientato:



- Il nucleo è in questo caso formato dalla sola a_1.

Metodo Electre nella norma appalti

- Il Regolamento del Codice appalti (all. G) propone una versione particolare del metodo Electre.
- Si tratta di valutare, entro un insieme di offerte candidate, l’offerta economicamente più vantaggiosa.
- L’allegato G introduce diverse modalità per la determinazione di un «coefficiente di prestazione» di ogni offerta compreso tra 0 e 1.

- L’allegato distingue
  - elementi «di natura qualitativa», in cui entrano in gioco i giudizi dei diversi commissari
  - elementi «di natura quantitativa», per i quali si ha una trasformazione lineare.
- Considerato l’elemento di valutazione generico k (k=1,..., n), sia
  - a_{ki} la prestazione dell’offerta i rispetto a k (cioè il valore del coefficiente tra 0 e 1);
  - s_k il massimo scarto tra tali valori in k;
  - p_k, il peso dell’elemento k;
  - r, il numero delle offerte.

- Si definiscono gli «scarti»:
  - $f_{kij} = a_{ki} - a_{kj}$ per $a_{ki} > a_{kj}$ $(i \neq j)$
  - $g_{kji} = a_{kj} - a_{ki}$ per $a_{ki} < a_{kj}$ $(i \neq j)$
- e gli «indici»
  - di concordanza

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{kij}}{s_k} \cdot p_k$$

  - di discordanza

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_{kji}}{s_k} \cdot p_k$$

- Se $d_{ij} = 0$, a_i domina a_j e quindi la procedura prosegue dopo avere scartato a_j.

- Sono poi introdotti due possibili indicatori unici di dominanza per ogni a_i, tra cui scegliere:

$$q_{ij} = \frac{c_{ij}}{d_{ij}} \quad (\forall j : j \neq i)$$

$$q^*_{ij} = 1 + \frac{q_{ij}}{q_{ij\,\max}} \cdot 99 \quad (\forall j : j \neq i)$$

- Infine, per ogni a_i si determina il *punteggio globale* con una delle due formule:

$$P_i = \sum_{j=1}^{r} q_{ij} \quad (j \neq i) \qquad\qquad P_i = \sum_{j=1}^{r} q_{ij}^{*} \quad (j \neq i)$$

- Si noti che il metodo qui proposto consente di ricavare una graduatoria delle offerte.

Metodo TOPSIS

- TOPSIS l’acronimo di “*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*”.
- Il metodo prevede due momenti principali:
  – definire una soluzione ideale e una soluzione ideale in senso negativo,
  – selezionare l’alternativa preferibile che è quella più vicina alla soluzione ideale e più lontana da quella ideale negativa.

- Per valutare le distanze si può adottare la distanza Euclidea.
- Si considera quindi un ordinamento sulla base delle distanze rispetto ai punti precedentemente definiti.
- Il metodo considera i criteri “positivi” separatamente da quelli “negativi”, quindi nel nostro esempio prescinderemo dai segni.
- A partire dalla matrice della valutazione delle alternative rispetto ai criteri, si seguono tipicamente 6 passi.

- La matrice di partenza dell’esempio sarà:

	g_1 0,5	g_2 0,3	g_3 0,1	g_4 0,1
a_1	10	30	72	30
a_2	13	58	48	70
a_3	21	70	65	85
a_4	22	80	75	75

- *Primo passo:*
  costruzione della matrice normalizzata
- Per ogni valore $g_k(a_i)$ della matrice di partenza, si calcola il valore normalizzato:

$$r_{ik} = \frac{g_k(a_i)}{\sqrt{\sum_j [g_k(a_j)]^2}}$$

- si possono usare altri metodi di normalizzazione.

- La matrice diventa:

	g_1 0,5	g_2 0,3	g_3 0,1	g_4 0,1
a_1	0,289	0,240	0,547	0,220
a_2	0,376	0,465	0,365	0,513
a_3	0,608	0,561	0,494	0,622
a_4	0,637	0,641	0,570	0,549

- *Secondo passo:*
  costruzione della matrice normalizzata pesata
- Ogni valore r_{ik} è moltiplicato per il peso (relativo) del criterio:

$$v_{ik} = w_k \times r_{ik}$$

- I valori v_{ik} sono la base per identificare le soluzioni ideali e per confrontare le alternative con esse.

- La matrice diventa:

	g_1 0,5	g_2 0,3	g_3 0,1	g_4 0,1
a_1	0,145	0,072	0,055	0,022
a_2	0,188	0,139	0,036	0,051
a_3	0,304	0,168	0,049	0,062
a_4	0,318	0,192	0,057	0,055

- *Terzo passo:*
  determinazione degli ideali
- Si classificano i criteri in due sottoinsiemi:
  - I^B contiene i criteri per cui si cerca il massimo (ad es., qualità)
  - I^C contiene i criteri per cui si cerca il minimo (ad es., costi)
- Indicando con a* la soluzione ideale e con a- la soluzione ideale negativa, si ha:

$$a* = \{(\max_i v_{ik} : k \in I^B), (\min_i v_{ik} : k \in I^C), i = 1, \ldots, n\}$$

$$a- = \{(\min_i v_{ik} : k \in I^B), (\max_i v_{ik} : k \in I^C), i = 1, \ldots, n\}$$

- Quindi le due soluzioni ideali (fittizie) hanno coordinate:

$$a^* = (v^*_1, \ldots, v^*_k, \ldots, v^*_m)$$

$$a- = (v^-_1, \ldots, v^-_k, \ldots, v^-_m)$$

- a* rappresenta l’alternativa ideale che ha “benefici” massimi e “costi” minimi.
- a- rappresenta l’alternativa ideale negativa che ha “benefici” minimi e “costi” massimi.

- Nel caso d’esempio le soluzioni ideali sono:

	g1	g2	g3	g4
a*	0,145	0,192	0,057	0,062
a-	0,318	0,072	0,036	0,022

- *Quarto passo:*
  determinazione delle misure di separazione
- Si determinano le distanze dalla soluzione ideale e ideale negativa di ogni alternativa:

$$S_{i*} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (v_{ik} - v*_k)^2}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (v_{ik} - v^-_k)^2}, \quad i = 1, \ldots, n$$

- Nel caso d’esempio le distanze dagli ideali sono:

	Si*	Si-
a_1	0,127	0,175
a_2	0,072	0,150
a_3	0,161	0,106
a_4	0,174	0,126

- Se un’alternativa si avvicina a a* S_{i*} tende a 0 e se si avvicina a a- S_{i-} tende a 0.

- *Quinto passo: determinazione della prossimità alla soluzione ideale*
- La prossimità di a_i alla soluzione ideale è definita come segue:

$$C_{i*} = \frac{S_{i-}}{S_{i*} + S_{i-}} \quad 0 \le C_{i*} \le 1$$

- Se a_i coincide con la soluzione ideale: $C_{i*}=1$
- Se a_i coincide con la soluzione ideale negativa: $C_{i*}=0$.

- Nel caso d’esempio si ottiene:

	Si*	Si-	Ci*
a_1	0,127	0,175	0,579
a_2	0,072	0,150	0,674
a_3	0,161	0,106	0,397
a_4	0,174	0,126	0,421

- Si ricava quindi il seguente ordinamento:

a_2 *P* a_1 *P* a_4 *P* a_3