Derivati su Tassi d'Interesse

Derivati

- Strumenti primari o primitivi:
  - reddito variabile: azioni;
  - reddito fisso: obbligazioni.
- Strumenti derivati:
  - contratti forward;
  - contratti futures;
  - opzioni;
  - swaps;
  - ...
- strumenti 'ibridi' (prodotti strutturati) e altri strumenti: mix di strumenti primari e derivati.

Derivati

- Contratti derivati: strumenti finanziari i cui flussi di cassa dipendono (derivano) dal valore di una o più variabili sottostanti, tipicamente economiche;
- Il sottostante può essere un:
  - azione
  - obbligazione
  - tasso d'interesse
  - indice
  - bene di consumo
  - valuta (tasso di cambio)
  - derivato
  - rischio di credito
  - fenomeni meteorologici
  - eventi catastrofali
  - ...

Contratti Forward e Futures

- Accordi tra due parti per scambiarsi un'attività reale o uno strumento finanziario (sottostante) ad una data futura (epoca di consegna) e ad un prezzo fissato (prezzo di consegna);
  - la parte in posizione lunga (long position) riceve il sottostante;
  - la parte in posizione corta (short position) consegna il sottostante;
- entrambe le parti hanno un obbligo;
- la parte in posizione lunga/corta guadagna se il prezzo sale/scende;
- il prezzo di consegna viene fissato in maniera tale che non vi siano flussi alla stipula del contratto: il valore iniziale del Forward/Future è 0;
- consegna: fisica o in contanti;
- uso di forward/futures (e dei derivati in generale):
  - copertura (hedging)
  - speculazione
  - arbitraggio

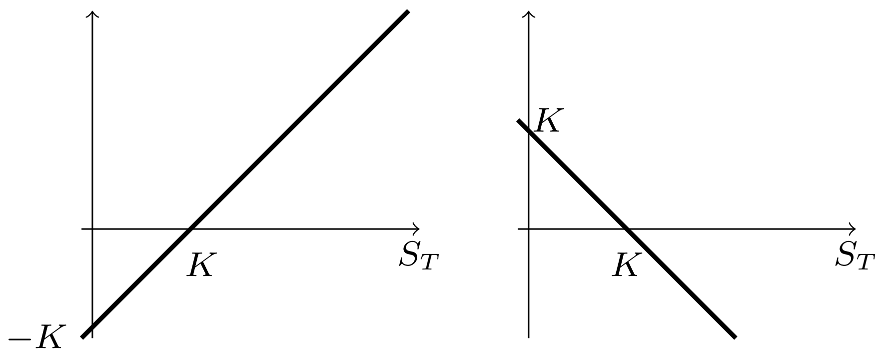
Forward vs. Futures

- Forward sono strumenti OTC/Futures sono scambiati su mercati organizzati (Chicago Board of Trade (CBOT), Chicago Mercantile Exchange (CME), London Financial Futures (LIFFE), ...) $\rightsquigarrow$ futures sono contratti standardizzati mentre i Forward non lo sono;
- i futures sono marked-to-market: ogni guadagno/perdita viene regolato alla fine di ogni giorno di contrattazione attraverso il sistema dei margini;
  $\rightsquigarrow$ il valore di un contratto futures è rimesso a 0 alla fine di ogni giorno di contrattazione; in un forward guadagni e perdite vengono realizzate all'epoca di consegna;
  $\rightsquigarrow$ i futures, a differenza dei forward, sono praticamente esenti dal rischio di credito;
- la controparte in un contratto future è in realtà la clearing house (cassa di compensazione); i forward sono contrattazioni private;
- i forward tipicamente vengono portati a scadenza, i futures vengono spesso chiusi prima della scadenza prendendo la posizione opposta.

Contratti Forward: payoff

- Epoca di contrattazione: 0; epoca di consegna: T.
- S_t: prezzo del sottostante in t; K: prezzo di consegna o prezzo forward;
- Payoff all'epoca di consegna è

$$S_T - K \quad \text{posizione lunga;} \qquad K - S_T \quad \text{posizione corta}$$



Contratti Forward

- Esempio: Due parti A e B entrano in un contratto forward per scambiare fra 3 mesi 100 tonnellate di alluminio al prezzo di 2500\$ per tonnellata (A compra l'alluminio da B);
- dopo 3 mesi
  - A riceve 100 tonnellate di alluminio e paga $100 \times 2500 = 250\,000\$$;
  - B consegna l'alluminio e riceve 250 000\$;
  - il prezzo spot dell'alluminio al momento dello scambio è irrilevante.

Contratti Forward

- Esempio (Continua): Il potenziale guadagno o perdita alla scadenza dipende invece dal prezzo corrente dell'alluminio
  - Se ad esempio il prezzo dell'alluminio dopo 3 mesi è 2580\$ per tonnellata, c'è un guadagno per A pari a

$$(2580 - 2500) \times 100 = 8000\$$$

    infatti si compra a 2500 un bene che vale 2580
  - se invece il prezzo è 2350\$ per tonnellata, allora c'è una perdita per A pari a

$$(2350 - 2500) \times 100 = -15\,000\$,$$

    infatti si compra a 2500 un bene il cui valore è 2350\$, pagandolo 2500\$.

Contratti Forward

▷ Esempio: copertura con contratti forward. Il 1/3/2011 una società italiana che opera in UK sa che riceverà i seguenti flussi:

$$\begin{array}{ll} \text{il } 1/6/2011 & 50 \text{ milioni}\pounds \\ \text{il } 1/9/2011 & 100 \text{ milioni}\pounds \end{array}$$

La società è esposta al rischio che il £ si deprezzi rispetto all'€. Il rischio può essere eliminato tramite contratti forward: prendendo una posizione corta (accordo per vendere £ e ricevere €) con scadenze 3 and 6 mesi e ammontari pari a 50 milioni £ e 100 milioni £ rispettivamente

Gestione del Rischio Finanziario

Contratti Forward

▷ Esempio (Continua):

- ⋆ Se ad esempio i seguenti tassi di cambio vengono quotati il 1/3/2011:

scadenza	tasso di cambio £/€
spot	1.11
3m	1.15
6m	1.21
1y	1.18

- ⋆ La società si accorda con una controparte per vendere fra 3 mesi 50 milioni £ a 1.15£/€ e fra 6 mesi 100 milioni £ a 1.21 £/€, così eliminando completamente il rischio (perfect hedge).

Contratti Forward

▷ Esempio (Continua):

- ⋆ perdite dovute al deprezzamento del £ e allo stesso modo i guadagni dovuti all'apprezzamento del £ sono eliminate.
- ⋆ I flussi per la compagnia derivanti dalla vendita di £ sono

$$\begin{array}{ll} \text{il } 1/6/2011 & 50 \text{ milioni}\pounds \times 1.15 = 57.5 \text{ milioni } € \\ \text{il } 1/9/2011 & 100 \text{ milioni}\pounds \times 1.21 = 121 \text{ milioni } € \end{array}$$

- ⋆ Il 1/6/2011 i flussi per la società sono quindi

$$\begin{array}{r} \text{riceve in UK } 50 \text{ milioni } \pounds \\ \text{consegna alla controparte del forward } 50 \text{ milioni } \pounds \\ \text{riceve dalla controparte del forward } 57.5 \text{ milioni } € \end{array}$$

Gestione del Rischio Finanziario

Contratti Forward

▷ Esempio (Continua):

- ⋆ il flusso complessivo per la società il 1/6/2011 è quindi pari a 57.5 milioni €, indipendentemente dal tasso di cambio £/€ prevalente il 1/6/2011.
- ⋆ In maniera simile, il 1/9/2011 i flussi dper la società sono

$$\begin{array}{r} \text{riceve in UK } 100 \text{ milioni } \pounds \\ \text{consegna alla controparte del forward } 100 \text{ milioni } \pounds \\ \text{riceve dalla controparte del forward } 121 \text{ milioni } € \end{array}$$

- ⋆ il flusso complessivo per la società il 1/9/2011 è pari a 121 milioni €, qualunque sia il tasso di cambio £/€ prevalente il 1/9/2011.

Futures: Marking-to-Market

- ▷ prezzo di consegna: prezzo futures.
- ▷ Chi investe in futures deve effettuare un deposito iniziale nel margin account con un broker.
- ▷ Alla fine di ogni giorno di contrattazione, il guadagno/perdita dell'investitore (differenza tra il prezzo futures di chiusura e il prezzo futures di apertura) aumentano/diminuiscono il margin account;
  $\rightsquigarrow$ il valore del contratto futures è rimesso a 0 alla fine di ogni giorno di contrattazione;
  ogni ammontare sopra il margine iniziale può essere prelevato dall'investitore.
- ▷ Se il margin account scende sotto un livello detto margine di mantenimento
  $\rightsquigarrow$ margin call: l'investitore deve effettuare un ulteriore deposito, detto variation margin, e reintegrare il margine iniziale.
- ▷ Il broker deve mantenere un conto simile con la clearing house.

Futures: Marking-to-Market

- ▷ Esempio: futures sull'oro;
- ▷ specifiche contrattuali:
  - ⋆ 1 contratto futures: consegna di 100 once d'oro;
  - ⋆ prezzo futures quotato (in $) per oncia;
  - ⋆ margine iniziale 2000$ per contratto;
  - ⋆ margine di mantenimento 1500$ per contratto;
- ▷ consideriamo una posizione lunga in 10 contratti futures
  $\rightsquigarrow$ margine iniziale/di mantenimento è 20 000$/15 000$;

giorno	prezzo futures	guadagno/perdita giornaliera	margin account
1	400	—	20 000
2	401	+100	21 000
3	399	−200	19 000
4	397.5	−150	17 500
5	394	−350	14 000
6	393.5	−50	19 500

Opzioni

- Un'opzione è un accordo tra due parti: una parte (posizione lunga, o holder dell'opzione) ha il diritto di comprare/vendere il sottostante ad un dato prezzo (strike o prezzo di esercizio), dalla/alla controparte (posizione corta, writer dell'opzione), ad una data futura (scadenza dell'opzione);
  - ⋆ un'opzione call dà all'holder il diritto di comprare, un'opzione put quello di vendere;
  - ⋆ la decisione di comprare/vendere è nota come esercizio dell'opzione;
  - ⋆ un'opzione è Europea se l'esercizio può avvenire solo alla scadenza;
  - ⋆ un'opzione è Americana se l'esercizio può avvenire ad ogni epoca precedente la scadenza.
- A differenza di forward (futures, swaps), le opzioni conferiscono all'holder un diritto, e al writer un obbligo; $\rightsquigarrow$ l'holder deve pagare un prezzo (premio dell'opzione) per acquistare l'opzione;
- A differenza di forward (futures, swaps), le opzioni, una volta pagato il loro prezzo d'acquisto, permettono di ottenere in futuro degli introiti senza mai richiedere esborsi;

Opzioni

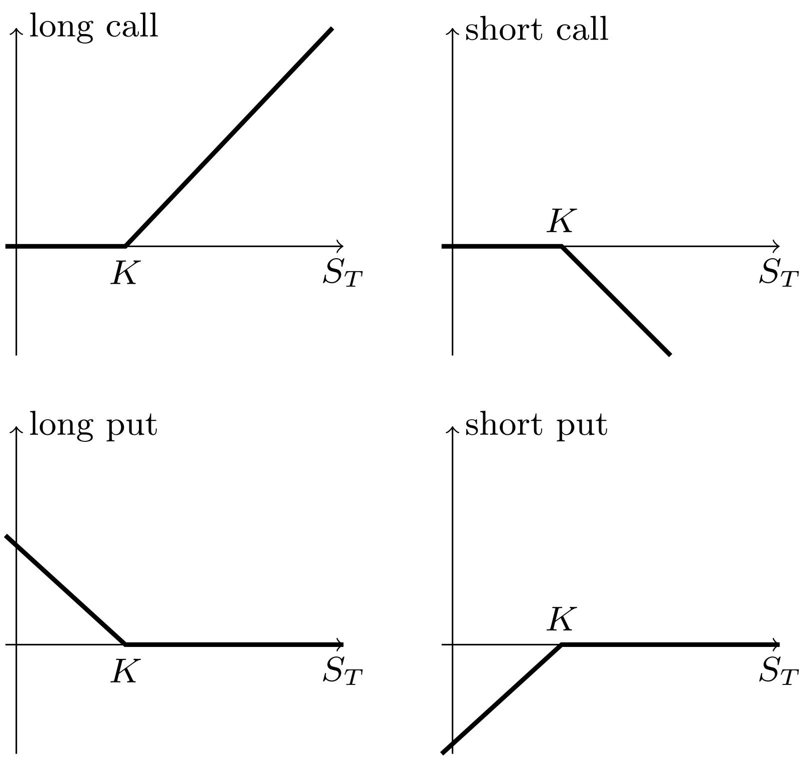
- Una posizione lunga su una call/put guadagna da un incremento/decremento di prezzo; l'opposto per una posizione corta;
- Le opzioni vengono scambiate sia su mercati organizzati che OTC;
- A volte un sistema di margini simile a quello dei futures (senza marking-to-market) viene applicato alla posizione corta; la posizione lunga si limita a pagare il premio;
- La maggior parte delle opzioni scambiate su mercati sono di tipo Americano;
- Usualmente, per opzioni scambiate su mercati, diversi strikes e scadenze vengono quotati in ogni momento;
- Le opzioni di tipo 'standard' sono chiamate plain-vanilla; quelle contenenti clausole particolare esotiche.

Payoff di un'Opzione

- Sia
  - ⋆ 0 stipula; T scadenza;
  - ⋆ S_t prezzo del sottostante in t; K prezzo di esercizio;
  - ⋆ C_t, P_t prezzi delle put/call Americane al tempo t;
  - ⋆ c_t, p_t prezzi delle put/call Europee al tempo t;

  dal momento che le opzioni conferiscono diritti, hanno sempre un valore nonnegativo: $C_t,\ c_t,\ P_t,\ p_t \geq 0$;
- ad ogni epoca $0 < t < T$, l'holder può (i) vendere l'opzione (ii) esercitarla (se Americana, esercizio anticipato) (iii) non fare niente; alla scadenza T, l'holder può (j) esercitarla (jj) non esercitarla.
- Essendo l'holder razionale, a scadenza T eserciterà la call se $S_T > K$, la put se $S_T < K$;
  - ⋆ $\rightsquigarrow$ il payoff della call a scadenza (= valore della Call) è $C_T = c_T = \max\{S_T - K, 0\}$;
  - ⋆ $\rightsquigarrow$ payoff della put(= valore della Put) è $P_T = p_T = \max\{K - S_T, 0\}$;
  - ⋆ $\rightsquigarrow$ il payoff per il writer della call/put è l'opposto: $\min\{0, K - S_T\}$ e $\min\{0, S_T - K\}$.

Payoff di un'opzione



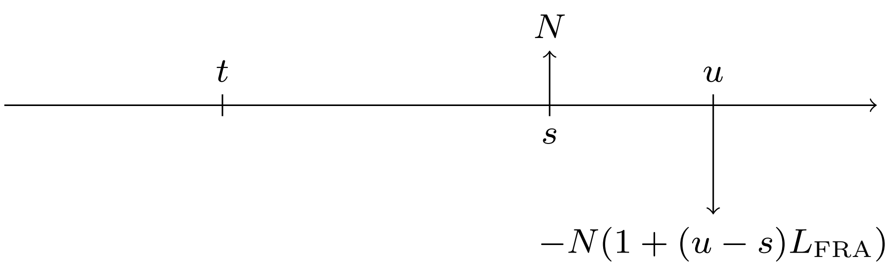
Forward Rate Agreements

- Un **Forward Rate Agreement** (FRA) è un contratto forward in cui due parti si accordano per applicare un tasso stabilito nel contratto (FRA rate), per un certo periodo, a partire da un certo istante futuro (settlement date), ad un certo ammontare nominale o nozionale. Si tratta quindi di un prestito con inizio differito. Alla stipula del contratto non vi sono scambi di flussi monetari.
- La parte in posizione lunga ('FRA buyer') del FRA è colui che prende a prestito (paga il FRA rate), mentre chi è in posizione corta ('FRA seller') è chi finanzia. Il buyer si protegge da un aumento dei tassi di interesse.
- Dal momento che il buyer può impiegare il capitale del prestito al tasso di riferimento prevalente alla settlement date, è comune regolare il FRA sulla differenza tra il FRA rate e il tasso prevalente. Di conseguenza il capitale nozionale non viene scambiato tra le parti.

Gestione del Rischio Finanziario

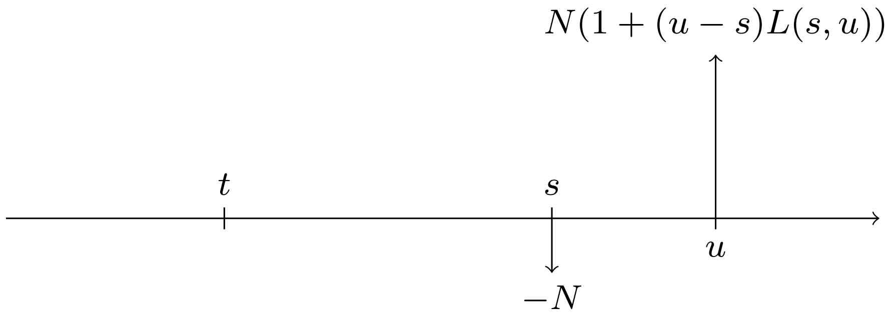
. . . FRA

- Come succede nella pratica, il FRA rate è un tasso semplice ed il tasso di riferimento corrispondente è il LIBOR (o EURIBOR). Siano allora $t < s < u$ con $t,\ s,\ u \in \mathbb{T}$, dove
  - ⋆ t = epoca in cui l'FRA viene stipulato (trade date),
  - ⋆ s = settlement date,
  - ⋆ u = maturity date,
- e inoltre siano L_{FRA} = FRA rate e $L(s,u)$ = tasso LIBOR prevalente in s per u; N = capitale nozionale a cui vengono applicati i tassi.

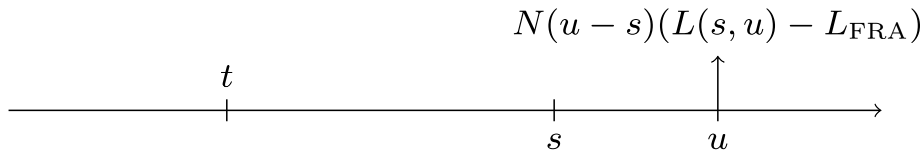


...FRA

- ▷ Impiegando l'importo N al tasso $L(s,u)$ prevalente in s,



- ▷ quindi, compensando i flussi, la situazione è



...FRA

- ▷ Quindi un FRA può essere visto come un contratto in cui due parti si scambiano un tasso fisso (il FRA rate) contro un tasso variabile (il LIBOR). Il payoff per il FRA buyer alla maturity date è la differenza tra il tasso variabile ed il fisso, applicato per il periodo di riferimento (settlement e maturity) ad il nominale N:

$$N\,(u-s)\,(L(s,u)-L_{\mathrm{FRA}}).$$

- ▷ Osserviamo che l'ammontare sopra è pagabile in u, ma è noto in s. Spesso nella pratica, la differenza viene liquidata alla settlement date, scontandola da u a s con il tasso di riferimento $L(s,u)$ (noto in s).
- ▷ Quindi in un FRA il buyer riceve in s l'importo

$$\frac{N\,(u-s)\,(L(s,u)-L_{\mathrm{FRA}})}{(1+(u-s)L(s,u))}.$$

...FRA

- Convenzione che riguarda i FRA: un FRA $n \times m$ (con n e m numeri di mesi, $n < m$) è un forward rate agreement con settlement date n mesi da oggi e maturity m mesi da oggi (quindi i tassi si applicano su un periodo di $m - n$ mesi).
- ESEMPIO: il 1/12/06 si osservano i seguenti FRA relativi all'EURIBOR:

Scadenza	FRA rate
3×6	3.78
6×9	3.84
9×12	3.84
6×12	3.86
12×18	3.77

Gestione del Rischio Finanziario

...FRA

- ESEMPIO (continua): Nel caso del FRA 12×18, se alla settlement date (fra 12 mesi) il tasso EURIBOR a 6 mesi è $L(1, \frac{3}{2}) = 2.80$ $(1/12/06 = 0)$, e il nominale è 50 000 000€ allora il buyer dovrà pagare tra 18 mesi l'ammontare

$$50\,000\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.0280 - 0.0377) = -242\,500€$$

o equivalentemente tra 12 mesi l'importo

$$\frac{50\,000\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.0280 - 0.0377)}{(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.0280)} = -239\,151.9€$$

- Nel caso del FRA 9×12, se ad esempio alla settlement date (fra 9 mesi) il tasso EURIBOR a 3 mesi è $L(\frac{3}{4}, 1) = 4.32$ $(1/12/06 = 0)$, e il nominale è 1 000 000€ allora il buyer riceve (tra 9 mesi) l'ammontare

$$\frac{1\,000\,000 \cdot \frac{1}{4} \cdot (0.0432 - 0.0384)}{(1 + \frac{1}{4} \cdot 0.0432)} = 1187.18€$$

Valutazione di un FRA

▷ Indichiamo con FRA(v) il valore in v, con $t \leq v \leq s$, del FRA per il buyer del contatto (paga il fisso e riceve il variabile). Il valore del contratto dipende da vari elementi:

$$\mathrm{FRA}(v) = \mathrm{FRA}(v; (t, s, u), L_{\mathrm{FRA}}, N).$$

▷ Il FRA rate, L_{FRA}, viene stabilito in maniera tale che alla stipula del contratto il valore sia nullo (non c'è scambio di denaro), quindi

$$L_{\mathrm{FRA}} : \ \mathrm{FRA}(t) = 0.$$

▷ Dopo l'epoca t il valore potrà essere sia positivo che negativo, quindi è interessante calcolare il suo valore in ogni epoca tra t ed s, tenendo conto che in s il valore deve essere pari a

$$\mathrm{FRA}(s) = \frac{N\,(u-s)\,(L(s,u) - L_{\mathrm{FRA}})}{1 + (u-s)L(s,u)},$$

Gestione del Rischio Finanziario

. . . Valutazione di un FRA

▷ che è anche uguale, sommando e sottraendo il nozionale, a

$$\mathrm{FRA}(s) = N\left[1 - \frac{1 + (u-s)\,L_{\mathrm{FRA}}}{1 + (u-s)L(s,u)}\right].$$

▷ Riesce, per $t \leq v \leq s$,

$$\mathrm{FRA}(v) = N\,[B(v,s) - (1 + (u-s)L_{\mathrm{FRA}})B(v,u)]$$

▷ Infatti, all'epoca v, consideriamo la seguente strategia:

- ⋆ Si acquistano N TCN con scadenza s;
- ⋆ Si vendono $N(1 + (u-s)L_{\mathrm{FRA}})$ TCN con scadenza u.

▷ Il payoff in v è allora dato da $N\,[(1 + (u-s)L_{\mathrm{FRA}})B(v,u) - B(v,s)]$.

...Valutazione di un FRA

- All'epoca s,
  - ⋆ Si ricevono N€ per i TCN in scadenza;
  - ⋆ Si riacquistano i TCN con scadenza u, al prezzo di $N(1+(u-s)L_{\mathrm{FRA}})B(s,u)$.
- Il payoff in s è dato da

$$\begin{aligned} & N\left[1-(1+(u-s)L_{\mathrm{FRA}})B(s,u)\right]= \\ =& N\left[1-\frac{1+(u-s)L_{\mathrm{FRA}}}{1+(u-s)L(s,u)}\right], \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $B(s,u)=\frac{1}{1+(u-s)L(s,u)}$. La tesi segue allora dalla legge del prezzo unico.

Gestione del Rischio Finanziario

...Valutazione di un FRA

- Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{FRA}(v) &= N\left[B(v,s)-(1+(u-s)L_{\mathrm{FRA}})B(v,u)\right] \\ &= N\left[\frac{B(v,s)}{B(v,u)}-(1+(u-s)L_{\mathrm{FRA}})\right]B(v,u) \\ &= N\left[(1+(u-s)L_f(v,s,u))-(1+(u-s)L_{\mathrm{FRA}})\right]B(v,u) \\ &= N(u-s)\left[L_f(v,s,u)-L_{\mathrm{FRA}}\right]B(v,u). \end{aligned}$$

- Quindi un FRA può essere valutato assumendo che il tasso forward si realizzi, cioè sostituendo al tasso spot in s per u il tasso forward in v per $[s,u]$ e scontando poi il risultato da u a v.
- Segue anche che $\mathrm{FRA}(v) > (<,=) 0$ se e solo se $L_f(v,s,u) > (<,=) L_{\mathrm{FRA}}$.
- In particolare, il FRA rate L_{FRA} è scelto in maniera tale che il valore iniziale del contratto sia nullo: $\mathrm{FRA}(t)=0 \Leftrightarrow L_{\mathrm{FRA}}=L_f(t,s,u)$.

. . . Valutazione di un FRA

- Il risultato appena visto è valido in generale: un payoff che dipende (linearmente) da un tasso futuro si può valutare assumendo che il tasso forward si realizzi ('forward projection method').
- Infatti, per $t < s < u$, consideriamo il valore in t per ricevere $L(s, u)$ in u:
  - $B(t, s)$ in t equivale a 1€ in s;
  - 1€ in s può essere investito per avere $1 + (u - s)L(s, u)$ in u;
  - quindi $B(t, s)$ in t equivale a $1 + (u - s)L(s, u)$ in u;
  - segue che il valore di in t di $L(s, u)$ in u è dato da

$$\frac{1}{u-s}\left[B(t,s) - B(t,u)\right].$$

- La tesi segue dal fatto che

$$\frac{1}{u-s}\left[B(t,s) - B(t,u)\right] = B(t,u)L_f(t,s,u).$$

- Il valore in t di $\alpha + \beta L(s, u)$ in u è allora

$$(\alpha + \beta L_f(t,s,u))B(t,u).$$

Gestione del Rischio Finanziario

. . . Valutazione di un FRA

- Esempio: con riferimento alle quotazioni viste prima
  - consideriamo il 9×12 FRA dove il tasso FRA è 3.84%, e un nominale pari a 10 milioni €;
  - dopo 6 mesi la struttura per scadenza dei tassi EURIBOR è piatta al 3.5%; il, tasso forward è quindi $L_f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1) = 3.47\%$ e il valore del FRA è negativo per la parte in posizione lunga:

$$\begin{aligned} \text{FRA}\left(\frac{1}{2}\right) &= 10 \text{ milioni } \times \frac{(3.47\% - 3.84\%) \times \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} \times 3.5\%} \\ &= -9090.91€. \end{aligned}$$

  la parte in posizione lunga potrebbe pagare il valore assoluto di questo ammontare alla parte in posizione corta chiudendo così il FRA.

Interest Rate Swaps (IRS)

- Un **interest rate swap** è un accordo OTC in base al quale due parti si scambiano periodicamente flussi determinati da tassi di interesse diversi.
- Nati negli anni ‘80, si sono poi sviluppati tanto che si tratta dei derivati OTC su tassi d’interesse più diffusi.
- Una delle due parti paga un tasso variabile (LIBOR, EURIBOR, treasury rate, tasso swap, ...) mentre l’altra paga un tasso fisso o variabile a sua volta. Ai tassi si possono sommare eventualmente degli spread. Entrambe i tassi sono applicati ad uno stesso capitale nominale (o nozionale).
- I tassi variabili vengono calcolati in date chiamate reset dates e applicati in date chiamate settlement dates. I due tassi possono differire in quanto a frequenza di applicazione (e.g. uno semestrale ed uno trimestrale) e per regola di calcolo dei giorni. La durata di uno swap in genere va da 1 a 30 o più anni.

...Interest Rate Swaps

- Nel seguito consideriamo solamente il caso di un **plain-vanilla interest rate swap**, in cui una parte (fixed rate payer-floating rate receiver, o buyer dello swap, o parte in posizione lunga) paga un tasso fisso e riceve il tasso variabile, mentre l’altra parte (fixed rate receiver-floating rate payer, seller dello swap o parte in posizione corta) paga un tasso variabile e riceve il tasso fisso. Si parla allora di fixed-for-floating swap.
- Il termine **payer swap** si riferisce ad uno swap in cui si è fixed rate payer, mentre per l’altra parte è un **receiver swap** (i termini sono riferiti ai pagamenti di tasso fisso).
- A volte l’insieme dei pagamenti di tasso fisso prende il nome di fixed-leg o fixed-branch, mentre l’insieme di pagamenti variabili è noto come floating-leg o floating-branch.

. . . Interest Rate Swaps

- ▷ Nel seguito prenderemo come tasso variabile il LIBOR (cioè il tasso semplice privo di rischio).
- ▷ In un plain-vanilla swap le settlement dates coincidono per i due tassi, ed inoltre le reset dates dei tassi variabili precedono le settlement dates esattamente per i periodi di applicazione dei tassi variabili.
- ▷ Ad esempio nel caso di frequenza di pagamenti semestrali, ad ogni reset date si osserva il tasso LIBOR a 6 mesi che poi viene regolato alla settlement date successiva, cioè 6 mesi dopo. In questo caso il tasso variabile viene pagato alla settlement date ma è predeterminato, cioè è noto alla reset date precedente.
- ▷ Il tasso fisso viene scelto in maniera tale che il valore iniziale dello swap è nullo, cioè inizialmente non vi sono scambi di flussi. Il tasso così determinato è noto come **tasso swap**.

. . . Interest Rate Swaps

- ▷ Una prima giustificazione economica degli swap è quella nota come asset/liability transformation: chi si indebita a tasso fisso può entrare in un receiver swap, trasformando così la natura della sua passività da indebitamento a tasso fisso in indebitamento a tasso variabile.
- ▷ Situazione opposta nel caso di indebitamento a tasso variabile, si può tasformare in tasso fisso entrando in un payer swap.
- ▷ Analoghe considerazione valgono nel caso di trasformazione di un asset: chi investe a tasso variabile/fisso può convertire l'investimento in tasso fisso/variabile entrando in un receiver/payer swap.

... Interest Rate Swaps

- Esempio: Un'impresa ha emesso obbligazioni a tasso fisso con durata 5 anni, tasso nominale 7%, cedole semestrali, per un valore facciale di 100 milioni di €
- Dopo 1 anno dall'emissione, anticipando una diminuzione dei tassi d'interesse, l'impresa vorrebbe trasformare l'interesse fisso che paga periodicamente in interesse variabile
- All'impresa vengono offerte le seguenti condizioni per entrare in un receiver swap in cui riceve fisso e paga variabile: 6% contro EURIBOR a 6 mesi più 1.3% di spread, per un nozionale di 100 milioni €
- Come risultato, l'impresa
  - paga $7\% \, \frac{1}{2} \, 100$ milioni $= 3\,500\,000$€ di cedola
  - riceve $6\% \frac{1}{2} \, 100$ milioni $= 3\,000\,000$€ dalla gamba fissa
  - paga $(L_{\frac{1}{2}} + 1.3\%) \, \frac{1}{2} 100$ milioni€ per la gamba variabile ($L_{\frac{1}{2}}$ è l'EURIBOR a 6 mesi)
- al netto dei flussi, l'impresa paga EURIBOR a 6 mesi più uno spread pari a 2.3%, per un flusso semestrale pari a $(L_{\frac{1}{2}} + 2.3\%) \, \frac{1}{2} 100$ milioni€.

Interest Rate Swaps: il Vantaggio Comparato

- Esempio: due entità, A e B, A con rating AA e B con rating BBB (B presenta un rischio di credito superiore) vogliono finanziarsi, A a tasso variabile e B a tasso fisso.
- Le condizioni che si presentano sono le seguenti:

	fisso	variabile
A	10%	$L_{1/2} + 0.3\%$
B	11.2%	$L_{1/2} + 1\%$

  dove $L_{1/2}$ è il tasso LIBOR a 6 mesi (cioè si pagano interessi semestralmente).
- In entrambe i mercati A trova condizioni migliori rispetto a B causa il rischio di credito più elevato di quest'ultimo.
- Tuttavia, lo spread a tasso fisso tra A e B è $\Delta_f = 11.2\% - 10\% = 1.2\%$, mentre lo spread a tasso variabile è inferiore, essendo pari a $\Delta_v = (L_{1/2} + 1\%) - (L_{1/2} + 0.3\%) = 0.7\%$.

. . . Vantaggio Comparato

▷ Esempio (continua): in questo caso, $\Delta_f > \Delta_v$, B ha un vantaggio comparato nel mercato a tasso variabile rispetto ad A, infatti, rispetto alle condizioni offerte ad A ('comparativamente ad A'), è più vantaggioso per B finanziarsi a tasso variabile dal momento che rispetto ad A paga uno spread $\Delta_v = 0.7\%$ mentre a tasso fisso lo spread sarebbe $\Delta_f = 1.2\%$.

▷ Al contrario, A ha, rispetto a B, un vantaggio comparato nel mercato a tasso fisso in quanto può prendere a prestito in tale mercato ad un tasso inferiore rispetto a quello offerto a B del $\Delta_f = 1.2$ mentre a tasso variabile la differenza sarebbe solo del $\Delta_v = 0.7\%$.

▷ Di conseguenza, A può finanziarsi a tasso fisso, B a tasso variabile e poi potrebbero entrare in uno swap in cui A paga a B ogni 6 mesi il LIBOR e B paga ad a A un tasso fisso del 9.95%.

. . . Vantaggio Comparato

▷ Esempio (continua): la situazione allora è la seguente

- ⋆ A paga ogni 6 mesi il tasso fisso 10% e nello swap paga il LIBOR a 6 mesi e riceve il 9.95%. Complessivamente per A si ha

$$-10\% - L_{1/2} + 9.95\% = -(L_{1/2} + 0.05\%);$$

- ⋆ B paga ogni 6 mesi il LIBOR a 6 mesi più 1% e nello swap paga il 9.95% e riceve il LIBOR a 6 mesi. Quindi per B la situazione è la

$$-(L_{1/2} + 1\%) - 9.95\% + L_{1/2} = -10.95\%.$$

▷ Di conseguenza, A finisce per finanziarsi a tasso variabile al LIBOR a 6 mesi più 0.05% (invece che l'originario $L_{1/2} + 0.3$), con un risparmio del 0.25%. B invece si finanzia a tasso fisso pari a 10.95% (invece che 11.2%), con un risparmio del 0.25%.

▷ Quindi entrambe le parti beneficiano dall'uso dello swap, per un risparmio totale di $0.25\% + 0.25\% = 0.5\% = \Delta_f - \Delta_v$.

. . . Vantaggio Comparato

- Dunque l'uso dello swap permette di raggiungere condizioni economiche migliori per tutti i partecipanti al mercato, sfruttando questi vantaggi comparati.
- Critica all'argomento del vantaggio comparato: apparentemente ci sono opportunità di arbitraggio dal momento che sia A che B riescono ad ottenere una riduzione (senza alcun rischio) sul prestito nel mercato a cui volevano originariamente rivolgersi (A a tasso variabile e B a tasso fisso).
- In realtà non abbiamo tenuto conto del rischio di credito a cui sono soggetti sia A ma soprattutto B. Entrando in uno swap tra di loro, le due parti si scambiano anche parte del loro rischio di credito per cui il vantaggio che realizzano è subordinato al fatto che nessuno dei due sia insolvente. Se si verificasse un insolvenza di uno dei due, il rendimento sarebbe chiaramente inferiore.
- Nel seguito, analizzeremo gli swap nell'ipotesi che non vi sia rischio di credito.

. . . Vantaggio Comparato

- Formalizzando, A e B, A con qualità creditizia superiore a B (B presenta un rischio di credito superiore) vogliono finanziarsi, A a tasso variabile e B a tasso fisso.
- Le condizioni che si presentano sono le seguenti:

	fisso	variabile
A	$f_A\%$	$L_{1/2} + \delta_A\%$
B	$f_B\%$	$L_{1/2} + \delta_B\%$

  dove $L_{1/2}$ = LIBOR a 6 mesi.
- In entrambe i mercati A trova condizioni migliori rispetto a B: $f_A < f_B$ e $\delta_A < \delta_B$.
- Supponiamo che lo spread a tasso fisso tra A e B, $\Delta_f = f_B - f_A$ sia superiore al corrispondente spread a tasso variabile, $\Delta_v = (L_{1/2} + \delta_B) - (L_{1/2} + \delta_A) = \delta_B - \delta_A$, cioè $\Delta_f > \Delta_v$.

. . . Vantaggio Comparato

- quindi B ha un vantaggio comparato nel mercato a tasso variabile rispetto ad A; al contrario, A ha, rispetto a B, un vantaggio comparato nel mercato a tasso fisso; la differenza tra i due spread è $\bar{\Delta} = \Delta_f - \Delta_v$
- A si finanzia a tasso fisso pagando f_A, B a tasso variabile pagando $L_{1/2} + \delta_B$ e poi entrano in degli swap con un intermediario I (e.g. una banca)
  - ⋆ A entra in un receiver swap con I in cui paga $L_{1/2} + \widetilde{\delta}_A$ e riceve $\widetilde{f}_A$
  - ⋆ B entra in un payer swap con I in cui paga $\widetilde{f}_B$ e riceve $L_{1/2} + \widetilde{\delta}_B$
  - ⋆ chiaramente I richiede come compenso per l'intermediazione che $\widetilde{f}_B \geq \widetilde{f}_A$ e $\widetilde{\delta}_A \geq \widetilde{\delta}_B$ (almeno una delle due disuguaglianze vale in senso stretto)
- La situazione allora è la seguente
  - ⋆ A paga
$$f_A + (L_{1/2} + \widetilde{\delta}_A) - \widetilde{f}_A$$
  - ⋆ B paga
$$L_{1/2} + \delta_B + \widetilde{f}_B - (L_{1/2} + \widetilde{\delta}_B) = \delta_B + \widetilde{f}_B - \widetilde{\delta}_B.$$

. . . Vantaggio Comparato

- Supponiamo per semplicità che I non applichi uno spread al tasso variabile, $\widetilde{\delta}_A = \widetilde{\delta}_B = 0$
- Lo swap riesce vantaggioso per A, B e I se
  - ⋆ A: $f_A + L_{1/2} - \widetilde{f}_A < L_{1/2} + \delta_A$
  - ⋆ B: $\widetilde{f}_B + \delta_B < f_B$
  - ⋆ I: $\widetilde{f}_B > \widetilde{f}_A$

  cioè se $\widetilde{f}_A, \widetilde{f}_B$ sono tali che
$$f_B - \delta_B > \widetilde{f}_B > \widetilde{f}_A > f_A - \delta_A$$
  e questo è possibile se e solo se $f_A, f_B, \delta_A, \delta_B$ soddisfano le
$$f_B - \delta_B > f_A - \delta_A$$
  equivalente alla $\Delta_f - \Delta_v > 0$
- La somma dei guadagni è
$$(\widetilde{f}_B - \widetilde{f}_A) + (\widetilde{f}_A - f_A + \delta_A) + (f_B - \delta_B - \widetilde{f}_B) = \Delta_f - \Delta_v = \bar{\Delta}$$

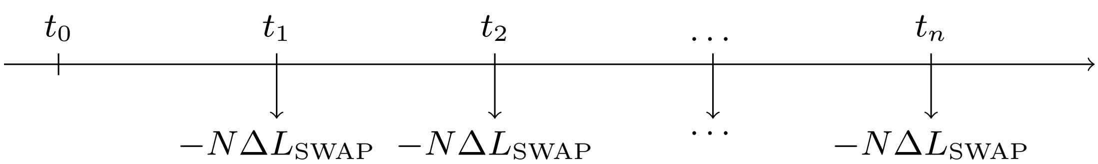
Valutazione di uno Swap

- Siano
  - $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n \in \mathbb{T}$ le settlement dates, cioè le epoche in cui avvengono gli scambi di denaro; supponiamo che siano equidistanziate: $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 2, \ldots, n$;
  - $t_0,\ t_1, \ldots,\ t_{n-1}$ sono le reset dates: in t_{i-1} si osserva il tasso LIBOR $L(t_{i-1}, t_i)$ che viene applicato sul periodo $[t_{i-1}, t_i]$ e pagato in t_i (è predeterminato); t_0 è l'epoca di stipula dello swap ($t_0 = t_1 - \Delta$);
  - $t_0,\ t_1, \ldots,\ t_n$ è il tenor dello swap;
  - L_{SWAP} è il tasso fisso pagato dal fixed rate payer alle epoche $t_1, \ldots,\ t_n$;
  - N è il nozionale a cui vengono applicati i tassi.
- Dal punto di vista del fixed rate payer, il flusso monetario alla generica settlement date t_i $(i = 1, \ldots, n)$ è

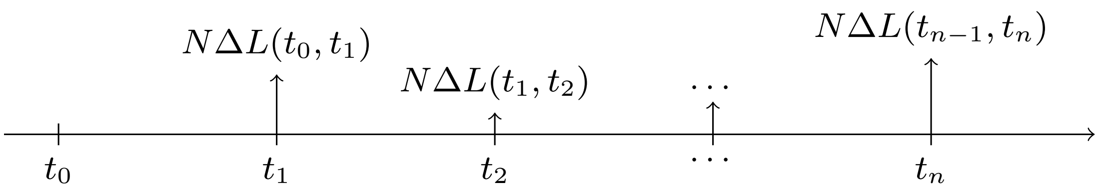
$$\underbrace{N\Delta L(t_{i-1}, t_i)}_{\text{floating leg}} - \underbrace{N\Delta L_{\text{SWAP}}}_{\text{fixed leg}} = N\Delta(L(t_{i-1}, t_i) - L_{\text{SWAP}}).$$

. . . Valutazione di uno Swap

- La fixed leg è



- e la floating leg è



... Valutazione di uno Swap

- Sia $t_0 \leq v \leq t_n$, con $v \in \mathbb{T}$, l'istante in cui vogliamo calcolare il valore del payer swap, che indichiamo con

$$\mathrm{SWAP}(v) = \mathrm{SWAP}(v; (t_i)_{i=0,\dots,n}, L_{\mathrm{SWAP}}, N).$$

- Il tasso swap viene fissato in maniera tale che all'inizio il valore del contratto swap è nullo, cioè non ci sono flussi:

$$L_{\mathrm{SWAP}}: \ \mathrm{SWAP}(t_0) = 0.$$

- Successivamente, il valore dello swap potrà cambiare e essere positivo o negativo.
- La decomposizione in fixed e floating leg suggerisce che deve essere

$$\mathrm{SWAP}(v) = V_{\mathrm{floating}}(v) - V_{\mathrm{fixed}}(v),$$

dove $V_{\mathrm{floating}}(v)$ e $V_{\mathrm{fixed}}(v)$ sono i valori in v delle due leg.

Gestione del Rischio Finanziario

... Valutazione di uno Swap

- Quest'ultima tuttavia, dal punto di vista interpretativo, non è la decomposizione appropriata.
- È invece preferibile ricorrere ad altre decomposizioni che permettono poi di determinare il valore dello swap.
- La prima di queste vede lo swap come portafoglio di Forward Rate Agreements;
  - ⋆ infatti il pagamento in t_i dello swap,

$$N\Delta(L(t_{i-1}, t_i) - L_{\mathrm{SWAP}}),$$

    è esattamente quello di un FRA con settlement date t_{i-1} e maturity date t_i, nominale N e tasso FRA rate pari a L_{SWAP}.
  - ⋆ Di conseguenza, per la legge del prezzo unico, deve essere

$$\mathrm{SWAP}(v) = \sum_{i: t_i > v} \mathrm{FRA}(v; (t_0, t_{i-1}, t_i), L_{\mathrm{SWAP}}, N).$$

... Valutazione di uno Swap

▷ ⋆ Dunque, se $v = t_i$, con $i = 0, \dots, n-1$, è

$$\mathrm{SWAP}(t_i) = N \sum_{j=i+1}^{n} \left[B(t_i, t_{j-1}) - (1 + \Delta L_{\mathrm{SWAP}}) B(t_i, t_j)\right].$$

⋆ Se invece $t_{i-1} < v < t_i$ per $i = 1, \dots, n$, essendo il pagamento successivo in t_i, pari a $N\Delta(L(t_{i-1}, t_i) - L_{\mathrm{SWAP}})$, già noto in v (è determinato in t_{i-1}), riesce

$$\begin{aligned}\mathrm{SWAP}(v) = & N\Delta(L(t_{i-1}, t_i) - L_{\mathrm{SWAP}}) B(v, t_i) \\ & + N \sum_{j=i+1}^{n} \left[B(v, t_{j-1}) - (1 + \Delta L_{\mathrm{SWAP}}) B(v, t_j)\right].\end{aligned}$$

Gestione del Rischio Finanziario

... Valutazione di uno Swap

▷ Il tasso swap in t_0 è quello che annulla il valore del contratto. Imponendo che $\mathrm{SWAP}(t_0) = 0$, si trova che

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{SWAP}} &= \frac{N \sum_{j=1}^{n} \left[B(t_0, t_{j-1}) - B(t_0, t_j)\right]}{N\Delta \sum_{j=1}^{n} B(t_0, t_j)} \\ &= \frac{1 - B(t_0, t_n)}{\Delta \sum_{j=1}^{n} B(t_0, t_j)}.\end{aligned}$$

▷ Si riconosce l'espressione di un par rate, come sarà confermato dalla seconda decomposizione di uno swap; quindi $L_{\mathrm{SWAP}} \equiv L_{\mathrm{SWAP}}(t_0, t_n) = c(t_0, n/\Delta)$.

▷ La relazione che lega il tasso swap ai fattori di sconto può essere usata in maniera 'iterativa', cioè conoscendo L_{SWAP} e $B(t_0, t_j)$ per $j = 1, \dots, n-1$ si può ricavare $B(t_0, t_n)$. I tassi swap possono essere quindi utilizzati per ricostruire la struttura a termine dei tassi.

. . . Valutazione di uno Swap

- Alternativamente, utilizzando il fatto che i FRA si possono valutare supponendo che i tassi forward si realizzano, si trova

$$\mathrm{SWAP}(t_0) = N\Delta \sum_{i=1}^{n} \left[L_f(t_0, t_{i-1}, t_i) - L_{\mathrm{SWAP}}\right] B(t_0, t_i),$$

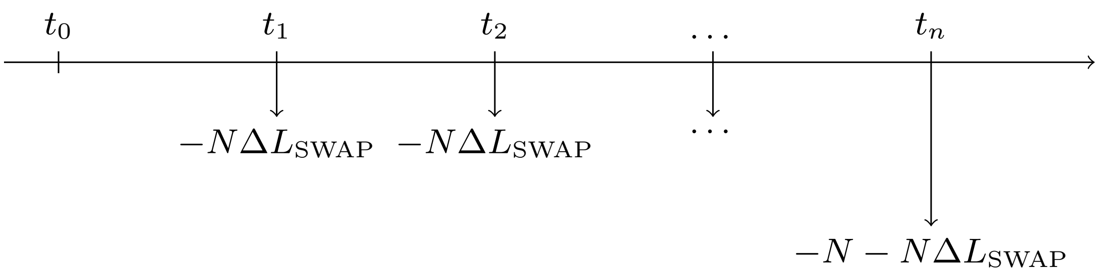
- si deduce allora che

$$L_{\mathrm{SWAP}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(t_0, t_i)}{\sum_{h=1}^{n} B(t_0, t_h)} L_f(t_0, t_{i-1}, t_i)$$

  cioè il tasso swap è la media ponderata dei tassi forward.
- Il tasso swap è la media dei tassi che rendono nulli i vari FRA che compongono lo swap. Questi FRA potranno non avere valore nullo in t_0 ma la somma dei loro valori sarà nulla.
- Se i tassi forward crescono (decrescono) allora i FRA che compongono lo SWAP avranno valore prima negativo e poi positivo (prima positivo e poi negativo).

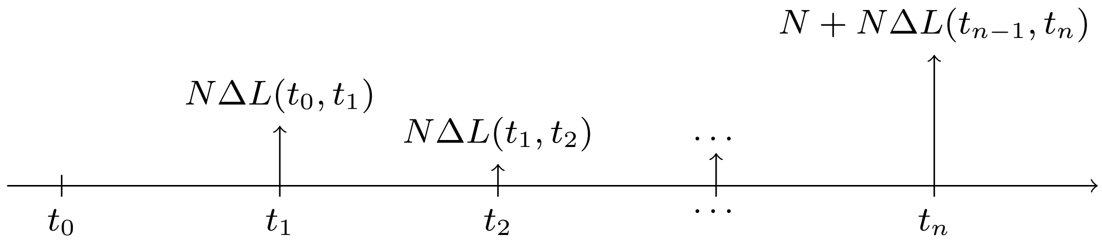
. . . Valutazione di uno Swap

- Il metodo alternativo per valutare un (payer) swap è di considerarlo come scambio di un titolo a cedola fissa contro un titolo a cedola variabile.
- Supponiamo che le due parti si scambino, alla maturity t_n, il nominale N. Dal momento che gli importi monetari si compensano, i flussi netti rimangono gli stessi. La fixed leg diventa



. . . Valutazione di uno Swap

▷ mentre e la floating leg è



▷ I flussi della fixed leg modificata sono quelli di un titolo con cedola fissa in cui il tasso nominale è il tasso swap L_{SWAP} (e il tasso cedolare è ΔL_{SWAP}). Indichiamo con $\text{CB}(v)$ il suo valore all'epoca $v \leq t_n$.

▷ I flussi della floating leg sono invece quelli di una obbligazione a tasso variabile o floater in cui ad ogni epoca t_i si riceve il LIBOR predeterminato alla reset date precedente $L(t_{i-1}, t_i)$ e il nominale alla scadenza. Indichiamo il suo valore all'epoca v con $\text{FL}(v)$.

. . . Valutazione di uno Swap

▷ Resta quindi da calcolare $\text{CB}(v)$ e $\text{FL}(v)$, poi il valore del payer swap sarà

$$\text{SWAP}(v) = \text{FL}(v) - \text{CB}(v).$$

▷ Il valore dell'obbligazione a tasso fisso è data da

$$\text{CB}(v) = N\Delta L_{\text{SWAP}} \sum_{i:t_i>v} B(v, t_i) + NB(v, t_n).$$

▷ L'obbligazione a tasso variabile quota alla pari ad ogni reset date:

$$\text{FL}(t_i) = N \text{ per } i = 0, \ldots, n-1.$$

. . . Valutazione di uno Swap

▷ Mostriamo che l'obbligazione a tasso variabile quota alla pari ad ogni reset date,

$$\mathrm{FL}(t_i) = N \text{ per } i = 0, \ldots, n-1.$$

⋆ Ad una generica reset date t_i, consideriamo la seguente strategia (roll-over): impieghiamo l'importo N€ fino a t_{i+1} al tasso prevalente $L(t_i, t_{i+1})$. In t_{i+1} riceviamo l'importo $N(1 + \Delta L(t_i, t_{i+1}))$; di questo, il nominale N viene reinvestito fino a t_{i+2}, e così via. All'ultima epoca t_n si riceve esattamente $N(1 + \Delta L(t_{n-1}, t_n))$, quindi i flussi sono esattamente gli stessi del floater.

. . . Valutazione di uno Swap

▷ ⋆ Segue che il valore in t_i del floater deve essere pari al valore della strategia, dato dal valore nominale, o $\mathrm{FL}(t_i) = N$.

⋆ In una qualunque epoca compresa tra due reset dates, $t_{i-1} < v < t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, il prezzo sarà il valore del prossimo pagamento (noto) alla reset date seguente, pari a $N\Delta L(t_{i-1}, t_i)$ più il valore del floater una volta pagata la cedola dato dal nominale, scontati da t_i a v:

$$\mathrm{FL}(v) = N(1 + \Delta L(t_{i-1}, t_i))B(v, t_i).$$

⋆ Allo stesso risultato si arriva utilizzando il fatto che il valore in t_i di $L(t_{j-1}, t_j)$ in t_j è $L_f(t_i, t_{j-1}, t_j)B(t_i, t_j)$ per $j = i + 1, \ldots, n$.

⋆ Nel caso in cui il Floater paghi il LIBOR più spread, cioè se la cedola in t_i è pari a $N\Delta(L(t_{i-1}, t_i) + \delta)$, dove δ è lo spread, allora il suo prezzo FL^δ, sarà

$$\mathrm{FL}^\delta(v) = \mathrm{FL}(v) + N\delta\Delta \sum_{i: t_i > v} B(v, t_i).$$

. . . Valutazione di uno Swap

▷ Tornando allo swap, dovrà essere

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SWAP}(t_i) =& \mathrm{FL}(t_i) - \mathrm{CB}(t_i) \\
=& N - N\Delta L_{\mathrm{SWAP}} \sum_{j=i+1}^{n} B(t_i, t_j) - NB(t_i, t_n),
\end{aligned}
$$

▷ e per $t_{i-1} < v < t_i$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SWAP}(v) =& \mathrm{FL}(v) - \mathrm{CB}(v) \\
=& N(1 + \Delta L(t_{i-1}, t_i))B(v, t_i) \\
& - N\Delta L_{\mathrm{SWAP}} \sum_{j=i}^{n} B(v, t_j) - NB(v, t_n),
\end{aligned}
$$

formule che si può facilmente vedere essere uguali a quelle già trovate.

Gestione del Rischio Finanziario

. . . Valutazione di uno Swap

▷ Osserviamo che per lo swap contrattato in t_i e con scadenza t_n, quindi con $n - i$ pagamenti, è

$$
L_{\mathrm{SWAP}}(t_i, t_n) = \frac{1 - B(t_i, t_n)}{\Delta \sum_{j=i+1}^{n} B(t_i, t_j)},
$$

di conseguenza il valore in t_i dello swap contrattato in t_0 è

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SWAP}(t_i) =& N - N\Delta L_{\mathrm{SWAP}}(t_0) \sum_{j=i+1}^{n} B(t_i, t_j) - NB(t_i, t_n) \\
=& N\Delta \left[L_{\mathrm{SWAP}}(t_i) - L_{\mathrm{SWAP}}(t_0)\right] \sum_{j=i+1}^{n} B(t_i, t_j)
\end{aligned}
$$

▷ Infatti in t_i si può entrare in un receiver swap (stesso tenor e nominale), le floating legs si semplificano e resta la differenza tra le fixed legs (certa)

... Valutazione di uno Swap

▷ In $t_j > t_i$ il payoff è

- ⋆ per il payer swap contrattato in t_0,

$$N\Delta(L(t_{j-1}, t_j) - L_{\text{SWAP}}(t_0))$$

- ⋆ per il receiver swap contrattato in t_i,

$$N\Delta(L_{\text{SWAP}}(t_i) - L(t_{j-1}, t_j))$$

▷ il flusso netto in t_j è quindi certo e dato da

$$N\Delta(L_{\text{SWAP}}(t_i) - L_{\text{SWAP}}(t_0)).$$

Struttura a termine dei tassi Swap

▷ Riassumendo, il tasso swap è il tasso nominale di un'obbligazione (con caratteristiche di durata e frequenza dei pagamenti uguali a quelle dello swap) che quota alla pari. Quindi il tasso swap corrisponde al par rate:

$$L_{\text{SWAP}} \equiv L_{\text{SWAP}}(t_0, t_n) = c(t_0, n/\Delta) = \frac{1 - B(t_0, t_n)}{\Delta \sum_{i=1}^{n} B(t_0, t_i)}.$$

▷ Un payer swap può quindi essere visto (in assenza di rischio di credito), come un contratto che prevede la vendita di un'obbligazione che paga il par rate contro il pagamento del nominale.

▷ La struttura a termine dei tassi swap all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \to L_{\text{SWAP}}(t, s), \quad s > t.$$

Tassi SWAP - t_0=1/12/06

$t_n - t_0$	$L_{\text{SWAP}}(t_0, t_n)$
1Y	3.87
2Y	3.83
3Y	3.82
4Y	3.82
5Y	3.81
6Y	3.82
7Y	3.83
8Y	3.85
9Y	3.87
10Y	3.89
11Y	3.91
12Y	3.93
15Y	3.98
20Y	4.02
25Y	4.02
30Y	4.01

Swaps

▷ Esempio: consideriamo lo swap a 6 anni con tasso swap pari a 3.82% e una posizione corta su tale swap (si paga variabile — EURIBOR a 6 mesi — e si riceve fisso — 3.82%) relativa ad un nozionale pari a 100 milioni €

- ⋆ lo swap ha termine il 1/12/12
- ⋆ i flussi sono semestrali; ogni flusso fisso è pari a

$$100\,000\,000 \times \frac{1}{2} \times 3.82\% = 1\,910\,000€$$

- ⋆ trascuriamo regole di calcolo dei giorni (la frazione d'anno è sempre 1/2), convenzioni su giorni non lavorativi, differenza tra bid e ask (3.82% è il mid-market) e tra trade date e effective date (quando lo swap viene contrattato e da quando produce i suoi effetti)
- ⋆ consideriamo un ipotetica evoluzione del tasso EURIBOR a 6 mesi e riportiamo la gamba fissa, la gamba variabile e i flussi netti

SWAPS

data	gamba fissa	EURIBOR 6m %	gamba variabile	flussi netti
01/12/06	—	3.22	—	—
01/06/07	1 910 000	4.15	1 610 000	300 000
01/12/07	1 910 000	4.58	2 075 000	−165 000
01/06/08	1 910 000	3.81	2 290 000	−380 000
01/12/08	1 910 000	2.87	1 905 000	5000
01/06/09	1 910 000	2.33	1 435 000	475 000
01/12/09	1 910 000	1.55	1 165 000	745 000
01/06/10	1 910 000	1.33	775 000	1 135 000
01/12/10	1 910 000	1.45	665 000	1 245 000
01/06/11	1 910 000	1.90	725 000	1 185 000
01/12/11	1 910 000	2.14	950 000	960 000
01/06/12	1 910 000	4.13	1 070 000	840 000
01/12/12	1 910 000	—	2 065 000	−155 000

▷ ESEMPIO: consideriamo lo swap a 10 anni, con tasso swap pari a 3.89%, ed una posizione lunga su un nominale pari a 500 000€

- ⋆ I flussi fissi sono pari a

$$500\,000 \times \frac{1}{2} \times 3.89\% = 9725€$$

- ⋆ Vogliamo effettuare la valutazione al 1/1/2011, quando la struttura per scadenza è la seguente (tassi semplici): posto $t = 1/1/2011$

$$L(t,s) = \begin{cases} 2.1\% & \text{se } s - t \leq 1 \\ 2.7\% & \text{se } 1 < s - t \leq 3 \\ 3.2\% & \text{se } 3 < s - t \leq 5 \\ 3.5\% & \text{se } s - t > 5 \end{cases}$$

- ⋆ L'ultimo EURIBOR a 6 mesi osservato all'ultima reset date, cioè il 1/12/2010, è pari a 4.05%; conosciamo quindi il prossimo flusso al 1/6/2011, pari a $(4.05\% - 3.89\%) \times \frac{1}{2} \times 500\,000 = 400€$
- ⋆ utilizziamo il 'forward projection method' per calcolare il valore della gamba variabile e quindi il valore dello swap

data	fixed leg	tassi fwd	floating leg	flussi netti	sconto	valori
1/6/11	9725	4.05	10 125	400	0.99	397
1/12/11	9725	2.08	5204	−4521	0.98	−4435
1/6/12	9725	3.73	9321	−404	0.96	−390
1/12/12	9725	2.60	6501	−3224	0.95	−3065
1/6/13	9725	2.57	6418	−3307	0.94	−3105
1/12/13	9725	2.53	6337	−3388	0.93	−3141
1/6/14	9725	5.67	14 175	4450	0.90	4012
1/12/14	9725	2.88	7212	−2513	0.89	−2234
1/6/15	9725	2.84	7109	−2616	0.88	−2292
1/12/15	9725	2.80	7009	−2716	0.86	−2346
1/6/16	9725	5.57	13 933	4208	0.84	3537
1/12/16	9725	2.94	7356	−2369	0.83	−1963
						−15 025

Swaps Esotici

- ▷ **Forward Start Swaps**: si tratta di uno swap concordato in t ma i cui effetti (la prima reset date) cominciano da un istante futuro t_0.
- ▷ **In-Arrear Swap**: reset dates e settlement dates coincidono, quindi il tasso variabile viene determinato e liquidato alla stessa epoca ('set and paid in arrear', mentre gli standard swap sono 'set in advance, paid in arrear').
- ▷ **Amortizing/Step-up Swap**: uno swap in cui il nominale viene ridotto/aumentato nel tempo in base ad un piano prestabilito.
- ▷ **Constant Maturity Swap**: è uno swap in cui il tasso variabile è il tasso swap relativo ad uno swap con maturità costante (e.g 10 anni). Ad esempio, in una certa epoca t_i, il payoff potrebbe essere

$$N\Delta(L_{\text{CMSWAP}} - L_{\text{SWAP}}(t_i, t_i + 10)).$$

- ▷ **Extendible/Retractible Swap**: una delle due parti ha il diritto (opzione) di estendere la durata/cancellare dello swap.

Forward Start Swaps

- Lo swap viene contrattato in t ma i suoi effetti iniziano alla prima reset date $t_0 > t$.
- Il tasso fisso che rende nullo il valore di questo swap è il tasso swap forward $L^f_{\text{SWAP}}(t, t_0, t_n)$.
- il valore della fixed leg (aggiungendo il nozionale in t_n) è

$$NB(t, t_n) + \sum_{i=1}^{n} N\Delta L^f_{\text{SWAP}}(t, t_0, t_n)B(t, t_i)$$

- Il valore in t_0 della floating leg (aggiungendo il nozionale in t_n) è pari a N, il corrispondente valore in t è quindi

$$NB(t, t_0)$$

- Uguagliando i valori di gamba fissa e gamba variabile, si trova

$$L^f_{\text{SWAP}}(t, t_0, t_n) = \frac{B(t, t_0) - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{i=1}^{n} B(t, t_i)}.$$

Swaptions (Swap Options)

- Una **Swaption Europea** è un contratto OTC che conferisce al suo possessore il diritto di entrare in uno swap, alla scadenza della swaption, ad un tasso fisso specificato inizialmente.
- Una payer swaption/receiver swaption dà il diritto di entrare in un payer/receiver swap in cui si paga/riceve il tasso swap fisso prespecificato.
- Di conseguenza una payer swaption protegge contro un aumento degli swap rates; indicato con K il tasso swap prespecificato, è intuitivo che si eserciterà l'opzione se alla scadenza t_0 riesce $L_{\text{SWAP}}(t_0, t_n) > K$, dove t_n è la scadenza dello swap sottostante l'opzione.
- Viceversa si eserciterà una receiver swaption se in t_0 riesce $L_{\text{SWAP}}(t_0, t_n) < K$ proteggendosi così da una diminuzione dei tassi swap.

Swaptions

- Formalmente, alla scadenza t_0 della swaption, il payoff per l'holder della payer swaption è

$$\star = \max\Bigg(\underbrace{N - NK\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i) - NB(t_0,t_n)}_{\bullet}, 0\Bigg),$$

dove $\bullet$ è il valore in t_0 dello swap in cui si paga il tasso fisso K e si riceve il tasso variabile.

- Dal momento che $L_{\text{SWAP}}(t_0) = \frac{1-B(t_0,t_n)}{\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i)}$, riesce

$$\begin{aligned}\star &= \max\left(N\Delta L_{\text{SWAP}}(t_0)\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i) - NK\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i), 0\right)\\ &= \max\left(N\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i)(L_{\text{SWAP}}(t_0) - K), 0\right)\end{aligned}$$

Gestione del Rischio Finanziario

Swaptions

-

$$\star = N\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i)\max\left(L_{\text{SWAP}}(t_0) - K, 0\right).$$

- Quindi si esercita l'opzione se e solo se il payoff è positivo, cioè se $L_{\text{SWAP}}(t_0) > K$. La payer swaption si può quindi anche vedere, trascurando il fattore $N\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i)$ (comunque noto solo in t_0), come una opzione call sul tasso swap.
- Viceversa una receiver swaption è equivalente ad una opzione put sul tasso swap.
- Se sommiamo il nominale all'ultimo pagamento dello swap, questo si può vedere come uno scambio tra una obbligazione a tasso fisso ed una a tasso variabile. Dal momento che la seconda quota alla pari in t_0, una payer swaption può essere vista come un'opzione put europea su un coupon bond, con cedole pari a $N\Delta K$, e con strike pari al nominale, cioè un'opzione di vendita alla pari.

Swaptions

▷ Infatti è

$$\begin{aligned}\star &= \max\left(N - NK\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i) - NB(t_0,t_n), 0\right)\\ &= N\max\left(1 - \underbrace{\left(K\Delta\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_i) + B(t_0,t_n)\right)}_{\mathrm{CB}(t_0)=\mathrm{CB}(t_0,K,(t_i))}, 0\right)\\ &= N\max\bigl(1 - CB(t_0), 0\bigr).\end{aligned}$$

▷ Viceversa il payoff in t_0 di una receiver swaption è

$$N\max(\mathrm{CB}(t_0) - 1, 0),$$

cioè il payoff di un'opzione call europea su un coupon bond con cedole pari a $N\Delta K$, e con strike pari al nominale, quindi un'opzione di acquisto alla pari.

Swaptions

▷ Quindi, valutare una swaption è equivalente a valutare un'opzione su un coupon bond, e per fare questo è necessario adottare un modello probabilistico per l'evoluzione dei tassi di interesse.

▷ Sotto opportune ipotesi sul modello, un'opzione su un coupon bond ($\equiv$ opzione su un portafoglio di TCN) si potrà calcolare come portafoglio di opzioni su TCN, il che è notevolmente più semplice.

▷ Inoltre, è sufficiente valutare il prezzo di una payer swaption per trovare anche il valore di una receiver swaption. Infatti una posizione lunga su una payer swaption ed una corta su una receiver swaption (aventi lo stesso strike K) corrisponde ad un forward start swap in cui il tasso swap è K.

▷ Le swaption vengono quotate in maniera simile ai FRA. Una swaption $t_0 \times (t_n - t_0)$ indica che la scadenza dell'opzione è t_0 e se si entra nello swap la scadenza è t_n. Ad esempio in una swaption 1×20 la scadenza della swaption è dopo 1 anno e lo swap sottostante ha scadenza 20 anni.

Swaptions

▷ Le swaptions vengono valutate tramite la formula di Black (1976) (t è l'epoca in cui la swaptions è contrattata):

$$\mathrm{SWAPTION}(t) = \Delta N \left(\sum_{i=1}^{n} B(t,t_i) \left[L^f_{\mathrm{SWAP}}(t,t_0,t_n)\Phi(d) - K\Phi(d-\sigma\sqrt{t_0-t}) \right] \right)$$

⋆ $L^f_{\mathrm{SWAP}}(t,t_0,t_n)$ è il tasso swap forward in t per uno swap da t_0 a t_n

⋆ Φ è la funzione di ripartizione della Normale standard e

$$d = \frac{\log\left(\frac{L^f_{\mathrm{SWAP}}(t,t_0,t_n)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_0-t)}{\sigma\sqrt{t_0-t}}$$

⋆ $\sigma > 0$ è un parametro noto come volatilità del tasso swap forward $L^f_{\mathrm{SWAP}}(t,t_0,t_n)$

⋆ È pratica comune quotare il prezzo in termini della volatilità σ (essendo la relazione tra prezzo e volatilità biunivoca)

Gestione del Rischio Finanziario

Swaptions

▷ Vale la pena menzionare una tipologia di swaptions esotiche, le **Bermudan swaptions**. Vi sono due varianti,

⋆ **Fixed end**: si tratta di una swaption che può essere esercitata in un certo numero di date $t_0,\ t_1,\ldots,t_{n-1}$, tipicamente equidistanziate. Una volta esercitata, si entra in uno swap con settlement dates le date rimanenti. Ad esempio, se si esercita in t_i, lo swap avrà come date $t_{i+1},\ \ldots,t_n$.

⋆ **Fixed length**: la swaption può essere esercitata in un certo numero di date $t_0,\ t_1,\ldots,t_n$, tipicamente equidistanziate. Una volta esercitata, si entra in uno swap con maturità fissata (ad esempio 10 anni). Se si esercita la swaption in t_i, si entra in uno swap con scadenza $t_i + 10$.

Swaptions

- Esempio: Un portfolio manager ha investito in varie obbligazioni a tasso variabile (EURIBOR a 6 mesi) con scadenza 5 anni. Anticipando una diminuzione dei tassi fra 1 anno, il manager entra in una receiver swaption 1×4 con strike 5% e in cui lo swap sottostante si basa sull'EURIBOR a 6 mesi
- Dopo 1 anno, se i tassi effettivamente sono scesi il manager decide di swappare i tassi variabili con un tasso fisso, e a tal fine confronta il tasso swap prevalente in quel momento per scadenza 4 anni, $L_{\mathrm{SWAP}}(1,5)$ con il tasso strike 5%, scegliendo il più elevato
- Ad esempio, se $L_{\mathrm{SWAP}}(1,5) = 4.5\%$ allora esercita la swaption pagando EURIBOR a 6 mesi e ricevendo 5%.
- Se invece $L_{\mathrm{SWAP}}(1,5) = 6\%$ allora non esercita la swaption e entra in un receiver swap alle condizioni prevalenti, pagando EURIBOR a 6 mesi e ricevendo 6%.

Caps, Floors e Collars

- Sono contratti OTC che permettono al possessore di proteggersi da variazioni dei tassi di interesse, in una o in entrambe le direzioni.
- Siano, come per uno swap, $t_1, \ \ldots, t_n$ le settlement dates e $t_0, \ \ldots t_{n-1}$ le reset dates, con $t_0, \ t_1, \ldots, t_n$ equidistanziate da Δ, e sia N il nominale. Il contratto viene stipulato in t_0 e prevede pagamenti in $t_1, \ \ldots, t_n$.
- Un **interest rate cap** prevede che ad ogni epoca t_i, $i = 1, \ldots, n$, il possessore riceva l'importo

$$N\Delta \max(L(t_{i-1}, t_i) - L_{\mathrm{CAP}}, 0),$$

dove L_{CAP} è il cap rate. Il possessore si protegge quindi da oscillazioni dei tassi di interesse al di sopra del cap rate.

Caps, Floors e Collars

- Se una parte si finanzia pagando il tasso variabile, acquistando un cap pone un limite superiore all'interesse da lui pagato. Riesce infatti

$$\begin{aligned} & -N\Delta L(t_{i-1},t_i) + N\Delta \max(L(t_{i-1},t_i) - L_{\text{CAP}}, 0) \\ = & -N\Delta \min(L_{\text{CAP}}, L(t_{i-1},t_i)), \end{aligned}$$

  quindi si finisce per pagare il più piccolo tra il tasso LIBOR e il cap rate.
- Viceversa, un **interest rate floor** prevede che il possessore riceva in t_i, per $i = 1, \ldots, n$, l'ammontare

$$N\Delta \max(L_{\text{FLOOR}} - L(t_{i-1},t_i), 0),$$

  quindi il possessore si protegge da oscillazioni dei tassi sotto il floor rate. Per chi investe a tasso variabile, acquistando un floor finisce per ricevere un tasso pari al massimo tra il tasso variabile ed il floor rate.

Caps, Floors e Collars

- Il singolo flusso di cassa del cap,

$$N\Delta \max(L(t_{i-1},t_i) - L_{\text{CAP}}, 0),$$

  viene chiamato caplet, mentre il generico pagamento del floor,

$$N\Delta \max(L_{\text{FLOOR}} - L(t_{i-1},t_i), 0),$$

  viene chiamato floorlet.
- Un caplet/floorlet è quindi un'opzione call/put europea sul tasso LIBOR prevalente con strike il cap/floor rate.
- Di conseguenza un cap/floor è un portafoglio di caplets/floorlets, cioè un portafoglio di call/put europee sui tassi LIBOR.

Caps, Floors e Collars

- Valutare un cap/floor equivale a valutare i singoli caplets/floorlets. Riesce cioè, indicando con $\mathrm{CAP}(v)$ e con $\mathrm{FLOOR}(v)$ i prezzi in v del cap, rispettivamente del floor, e con $\mathrm{CAPLET}_i(v)$, rispettivamente con $\mathrm{FLOORLET}_i(v)$, quello del singolo caplet/floorlet pagabile in $t_i(> v)$, relativo ad un nominale unitario ($N = 1$),

$$\mathrm{CAP}(v) = N \sum_{i:t_i>v} \mathrm{CAPLET}_i(v)$$
$$\mathrm{FLOOR}(v) = N \sum_{i:t_i>v} \mathrm{FLOORLET}_i(v).$$

- Osserviamo che sussiste anche una put-call parity tra cap e floor. Per ogni epoca t_i,

$$\max(L(t_{i-1}, t_i) - L_K, 0) - \max(L_K - L(t_{i-1}, t_i), 0) = L(t_{i-1}, t_i) - L_K,$$

Caps, Floors e Collars

- cioè una posizione lunga su un cap e una corta su un floor (con cap rate e floor rate uguali a L_K) equivale al payoff di un payer swap con swap rate pari a L_K:

$$\mathrm{CAP}(v) - \mathrm{FLOOR}(v) = \mathrm{SWAP}(v)$$

ad ogni epoca v.

- È possibile trasformare un caplet (opzione call sul libor) per scriverlo come opzione put su un TCN. Per fissare le idee, siano t l'epoca di valutazione, s l'epoca in cui si osserva il tasso $L(s, u)$ per l'epoca u, istante in cui viene pagato l'importo

$$(u - s) \max(L(s, u) - K, 0).$$

Il tasso K è il cap rate e il nominale è unitario ($N = 1$).

Caps, Floors e Collars

▷ Il valore del caplet in $t \leq u$ si indica con

$$\mathrm{CAPLET}(t) = \mathrm{CAPLET}(t; s, u, K).$$

Chiaramente, per $s \leq t \leq u$, essendo allora già noto l'importo pagato in u, si ha

$$\mathrm{CAPLET}(t) = B(t, u)(u - s) \max(L(s, u) - K, 0)$$

▷ Osserviamo che per $t = s$ si ha, usando il fatto che $L(s, u) = \frac{1}{u-s}(\frac{1}{B(s,u)} - 1)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{CAPLET}(s) &= B(s, u)(u - s) \max(L(s, u) - K, 0) \\ &= \max(B(s, u)(u - s)L(s, u) - B(s, u)(u - s)K, 0) \\ &= \max(1 - B(s, u) - B(s, u)(u - s)K, 0)\end{aligned}$$

Gestione del Rischio Finanziario

Caps, Floors e Collars

▷

$$\begin{aligned}&= \max(1 - B(s, u)(1 + (u - s)K), 0) \\ &= (1 + (u - s)K) \underbrace{\max\left(\frac{1}{1 + (u - s)K} - B(s, u), 0\right)}_{\bullet}\end{aligned}$$

dove $\bullet$ è il payoff di una put europea con scadenza s scritta su un TCN con maturità u, con strike $\frac{1}{1+(u-s)K}$ (è il prezzo di un TCN se il tasso semplice è K).

▷ Quindi, indicando con

$$\mathrm{PUT}^{\mathrm{TCN}}(t) = \mathrm{PUT}^{\mathrm{TCN}}(t; s, u, H)$$

il prezzo in t di una put Europea scritta su un TCN, con scadenza dell'opzione s, scadenza del TCN u e strike H, dovrà essere, per $t < s$,

$$\mathrm{CAPLET}(t; s, u, K) = (1 + K(u - s))\, \mathrm{PUT}^{\mathrm{TCN}}\left(t; s, u, \frac{1}{1 + K(u - s)}\right).$$

Caps, Floors e Collars

- e il prezzo di un cap sarà allora,
  - per $t = t_i$

$$\mathrm{CAP}(t_i) = N(1+\Delta L_{\mathrm{CAP}}) \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{PUT}^{\mathrm{TCN}}\left(t_i; t_{j-1}, t_j, \frac{1}{1+\Delta L_{\mathrm{CAP}}}\right),$$

  - mentre per $t_{i-1} < t < t_i$ bisogna aggiungere il valore del prossimo pagamento:

$$\begin{aligned}\mathrm{CAP}(t) = & N(1+\Delta L_{\mathrm{CAP}}) \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{PUT}^{\mathrm{TCN}}\left(t; t_{j-1}, t_j, \frac{1}{1+\Delta L_{\mathrm{CAP}}}\right) \\ & + NB(t,t_i)\Delta \max(L(t_{i-1},t_i) - L_{\mathrm{CAP}}, 0).\end{aligned}$$

Gestione del Rischio Finanziario

Caps, Floors e Collars

- In maniera simile, per un floorlet con le stesse caratteristiche del caplet analizzato prima, si avrà,
  - per ogni $s \leq t \leq u$

$$\mathrm{FLOORLET}(t) = B(t,u)(u-s)\max(K - L(s,u), 0),$$

  - per $t = s$ si ha

$$\mathrm{FLOORLET}(s) = (1+K(u-s))\max\left(B(s,u) - \frac{1}{1+K(u-s)}, 0\right),$$

  - quindi per $t < s$ è

$$\mathrm{FLOORLET}(t) = (1+K(u-s))\,\mathrm{CALL}^{\mathrm{TCN}}\left(t; s, u, \frac{1}{1+K(u-s)}\right).$$

Caps, Floors e Collars

- Il prezzo di un floor sarà allora,
  - per $t = t_i$

$$\text{FLOOR}(t_i) =$$
$$= N(1+\Delta L_{\text{FLOOR}}) \sum_{j=i+1}^{n} \text{CALL}^{\text{TCN}}\left(t_i; t_{j-1}, t_j, \frac{1}{1+\Delta L_{\text{FLOOR}}}\right),$$

  - mentre per $t_{i-1} < t < t_i$,

$$\begin{aligned}\text{FLOOR}(t) =& N(1+\Delta L_{\text{CAP}}) \sum_{j=i+1}^{n} \text{CALL}^{\text{TCN}}\left(t; t_{j-1}, t_j, \frac{1}{1+\Delta L_{\text{FLOOR}}}\right)\\ &+ NB(t,t_i)\Delta \max(L_{\text{FLOOR}} - L(t_{i-1},t_i), 0).\end{aligned}$$

Caps, Floors e Collars

- Il generico Caplet viene prezzato tramite la formula di Black (1976):

$$\begin{aligned}\text{CAPLET}(t; s, u, K) = (u-s)B(t,u)\big[&L_f(t,s,u)\Phi(d)\\ &-L_{\text{CAP}}\Phi(d - \sigma\sqrt{s-t})\big]\end{aligned}$$

  - Φ è la funzione di ripartizione della Normale standard e

$$d = \frac{\log\left(\frac{L_f(t,s,u)}{L_{\text{CAP}}}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}$$

  - $\sigma > 0$ è un parametro interpretato come volatilità del tasso forward $L_f(t,s,u)$.
  - È pratica comune quotare un cap non tramite il prezzo ma come volatilità costante nella formula di Black di tutti i caplet che lo compongono (essendovi corrispondenza biunivoca tra prezzi e volatilità)
  - Una formula simile si usa per i floor.

Caps, Floors e Collars

▷ Un **collar** è un contratto che garantisce ad una parte che paga o riceve interessi variabili, che tali pagamenti resteranno confinati ad un intervallo specificato. Il possessore del collar riceve all'epoca t_i l'importo

$$N\Delta[\max(L(t_{i-1},t_i)-L_{\text{CAP}},0)-\max(L_{\text{FLOOR}}-L(t_{i-1},t_i),0)] =$$
$$= N\Delta\begin{cases} L(t_{i-1},t_i)-L_{\text{CAP}} & \text{se } L(t_{i-1},t_i) > L_{\text{CAP}} \\ 0 & \text{se } L_{\text{CAP}} \geq L(t_{i-1},t_i) \geq L_{\text{FLOOR}} \\ L(t_{i-1},t_i)-L_{\text{FLOOR}} & \text{se } L(t_{i-1},t_i) < L_{\text{FLOOR}}. \end{cases}$$

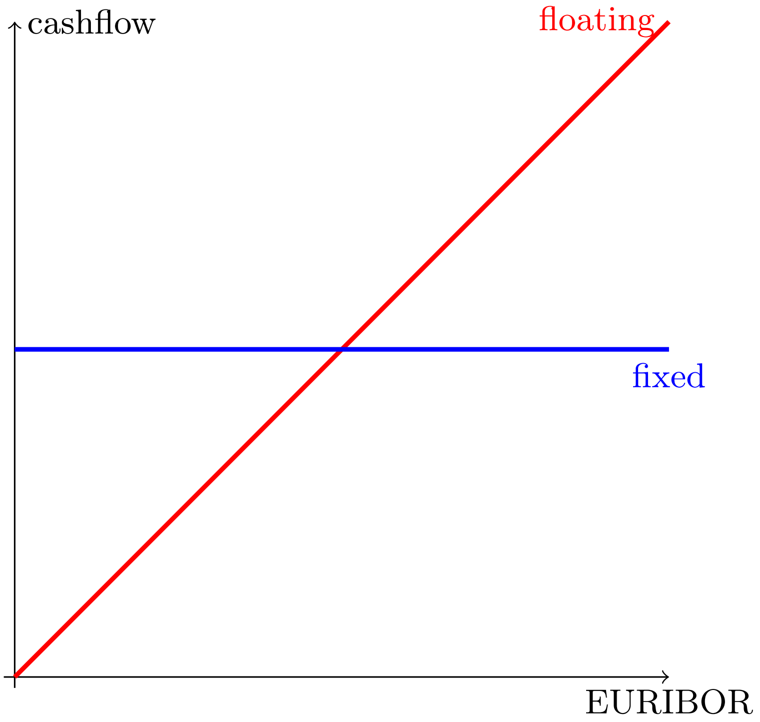
. . . Caps, Floors e Collars

▷ È chiaro che un collar equivale ad una posizione lunga su un cap con cap rate L_{CAP} e una posizione corta su un floor con floor rate L_{FLOOR}. Riesce dunque

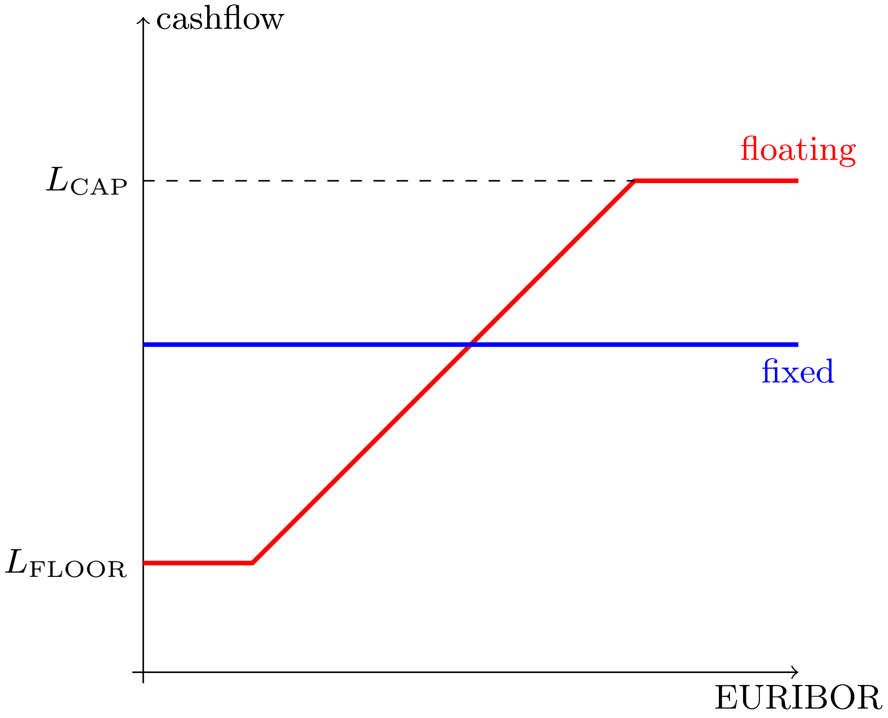
$$\text{COLLAR}(v) = \text{CAP}(v; L_{\text{CAP}}) - \text{FLOOR}(v; L_{\text{FLOOR}}).$$

▷ A volte i due tassi L_{CAP} e L_{FLOOR} sono scelti in maniera tale che i valori del cap e del floor siano uguali, cioè tali che il collar non abbia valore.

Standard Swap



Swap + Collar



Caps, Floors e Collars

▷ Esempio: Il 1/3/2011 un impresa contrae con una banca un mutuo pari a 10 milioni € a quote capitali costanti e rate trimestrali per due anni. Gli interessi sono variabili e pari all'EURIBOR a 3 mesi più 150 punti base sul debito residuo. Il piano di ammortamento è il seguente (cifre ×1000), dove $L_{3m}(t) = L(t, t+1/4)$ indica l'EURIBOR a 3 mesi alla data t

data	Debito residuo	Quota capitale	Quote interesse
1/3/11	10 000	—	—
1/6/11	8750	1250	$(L_{3m}(1/3/11) + 1.5\%)\frac{1}{4}10\,000$
1/9/11	7500	1250	$(L_{3m}(1/6/11) + 1.5\%)\frac{1}{4}8750$
1/12/11	6250	1250	$(L_{3m}(1/9/11) + 1.5\%)\frac{1}{4}7500$
1/3/12	5000	1250	$(L_{3m}(1/12/11) + 1.5\%)\frac{1}{4}6250$
1/6/12	3750	1250	$(L_{3m}(1/3/12) + 1.5\%)\frac{1}{4}5000$
1/9/12	2500	1250	$(L_{3m}(1/6/12) + 1.5\%)\frac{1}{4}3750$
1/12/12	1250	1250	$(L_{3m}(1/9/12) + 1.5\%)\frac{1}{4}2500$
1/3/13	0	1250	$(L_{3m}(1/12/12) + 1.5\%)\frac{1}{4}1250$

Caps, Floors e Collars

▷ Esempio (continua): al fine di coprirsi contro un eventuale incremento dei tassi (e quindi degli interessi pagati), l'impresa decide (sempre il 1/3/11) di acquistare un cap con le seguenti caratteristiche:

- ⋆ tasso di riferimento EURIBOR a 3 mesi
- ⋆ pagamenti trimestrali
- ⋆ tasso cap 6%
- ⋆ nozionale decrescente in base al debito residuo

▷ in tal modo l'impresa si garantisce di non pagare tassi superiori al 7.5%: per esempio, il 1/12/11 la quota interesse pagata sarà pari a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}7500\left[-(L_{3m} + 1.5\%) + \max\{L_{3m} - 6\%, 0\}\right] \\ &= \frac{1}{4}7500 \max\{-7.5\%, -(L_{3m} + 1.5\%)\} \\ &= -\frac{1}{4}7500 \min\{7.5\%, L_{3m} + 1.5\%\} \end{aligned}$$

Caps, Floors e Collars

- Esempio (continua): per contenere il costo del cap, l'impresa decide (sempre il 1/3/11) di vendere un floor con le seguenti caratteristiche:
  - ⋆ tasso di riferimento EURIBOR a 3 mesi
  - ⋆ pagamenti trimestrali
  - ⋆ tasso floor 2.5%
  - ⋆ nozionale decrescente in base al debito residuo
- Di conseguenza in tal modo l'impresa si garantisce di non pagare tassi al di fuori del range $4\% - 7.5\%$: per esempio, il 1/9/12 la quota interesse pagata sarà pari a

$$\frac{1}{4}3750\left[-(L_{3m}+1.5\%)+\max\{L_{3m}-6\%,0\}-\max\{2.5\%-L_{3m},0\}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}3750\begin{cases}7.5\% & \text{se } L_{3m} \geq 6\% \\ L_{3m}+1.5\% & \text{se } 2.5\% < L_{3m} < 6\% \\ 4\% & \text{se } L \leq 2.5\%\end{cases}$$