a.a. 2017-2018 **Nome:** A

1. Un videogioco è costituito da tre schermate successive, di difficoltà crescente. Se il concorrente supera indenne una schermata, può passare a quella successiva altrimenti ha perso. Se supera indenne tutte e tre le schermate vince il gioco. Un giocatore supera la prima schermata con probabilità 0.4. Una volta superata la prima schermata, la probabilità che superi anche la seconda è 0.3. Superate le prime due schermate, la probabilità che vinca il gioco (quindi che superi indenne anche la terza schermata) è 0.1. Qual è la probabilità che il giocatore vinca il gioco?

I dati che abbiamo sono: $P(I) = 0.4$, $P(II|I) = 0.3$, $P(III|I \cap II) = 0.1$. La probabilità che il giocatore superi tutte e tre le schermate (e quindi che vinca il gioco) e data dal prodotto delle probabilità:

$$P(I \cap II \cap III) = P(I) \cdot P(II|I) \cdot P(III|I \cap II) = 0.4 \times 0.3 \times 0.1 = 0.012$$

La probabilità che perda il gioco è $\overline{P(I \cap II \cap III)} = 1 - P(I \cap II \cap III) = 0.988$.

2. In misure ripetute di una grandezza fisica X le cui fluttuazioni si suppone siano trascurabili rispetto alla risoluzione di lettura degli strumenti utilizzati sono stati ottenuti i seguenti valori:

$x_1=(2.19\pm0.01)u_x$, $x_2=(2.22\pm0.01)u_x$, $x_3=(1.48\pm0.01)u_x$,
$x_4=(1.98\pm0.01)u_x$, $x_5=(2.65\pm0.01)u_x$, $x_6=(1.92\pm0.01)u_x$.

- Scrivere le formule da utilizzare per ottenere

la deviazione standard della distribuzione delle misure

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

la miglior stima del valore della grandezza fisica

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

il suo errore

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$$

- Calcolare i valori numerici e commentarli confrontandoli con i 6 valori iniziali:

$$\bar{x} = (2.07 \pm 0.16)u_x \quad \sigma = 0.39\, u_x \quad \sigma_{\bar{x}} = 0.16\, u_x$$

Le 6 misure single sono contenute nell'intervallo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ ovvero $[0.91,3.23]$ e quindi il campione delle misure iniziali ha tutti valori tra loro compatibili

- Per la stessa grandezza fisica, misure diverse avevano dato i risultati $X=(2.55\pm0.02)u_x$ e $X=(2.321\pm0.005)u_x$. Discutere la compatibilità dei tre risultati sapendo che gli errori quotati sono tutti statistici.

La compatibilità del risultato da noi trovato con le misure in questione è:

$$|\bar{x} - X_1| < 3\sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{X_1}^2} \text{ ovvero } 0.48 < 3 \times 0.16 = 0.48 \text{ (marginale 0.003)}$$

$$|\bar{x} - X_2| < 3\sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{X_2}^2} \text{ ovvero } 0.25 < 3 \times 0.16 = 0.48 \text{ (compatibili)}$$

Mentre le due misure date non sono compatibili tra loro

$$|X_1 - X_2| < 3\sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2} \text{ ovvero } 0.21 < 3 \times 0.02 = 0.06$$

A

3. La variabile casuale $x \geq 0$ ha funzione di distribuzione $f(x) = a\, e^{-x/4}$.

a) Calcolare il valore di a

b) Calcolare valore medio μ e deviazione standard σ

c) Calcolare $P(|x-\mu| \geq 2\sigma)$ e commentare il risultato

a)

$$a\int_0^\infty e^{-x/4}\,dx = 1 \Rightarrow -4a\int_0^\infty de^{-\frac{x}{4}} = 4a = 1 \quad i.e\ a = \frac{1}{4}$$

b)

$$\mu = \frac{1}{4}\int_0^\infty xe^{-x/4}\,dx = 4 \quad \text{per parti: } \frac{1}{4}\int_0^\infty d\left(xe^{-x/4}\right) = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x/4}dx - \frac{1}{16}\int_0^\infty xe^{-x/4}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty xe^{-x/4}\,dx = 16$$

Per la deviazione standard usiamo la proprietà dei valori di aspettazione: $E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x}{4}}dx - 16$

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x}{4}}dx = 32 \quad \text{per parti: } \frac{1}{4}\int_0^\infty d\left(x^2e^{-x/4}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x/4}dx - \frac{1}{16}\int_0^\infty x^2e^{-x/4}\,dx \Rightarrow \int_0^\infty x^2e^{-x/4}\,dx = 128$$

Per cui la deviazione standard risulta $\sigma = 4$

c) Calcoliamo la probabilità che x cada nell'intervallo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ ovvero nell'intervallo tra 0 e 12 ($\mu - \sigma = 0$ e la variabile casuale è definita nell'intervallo $x \geq 0$

$$\frac{1}{4}\int_0^{12} e^{-x/4}\,dx = -\int_0^{12} de^{-\frac{x}{4}} = 1 - e^{-3} = 0.95$$

Lo stesso valore che avremo trovato nel caso di una distribuzione Gaussiana; Risulta quindi $P(|x-\mu| \geq 2\sigma) = 0.05$

4. Un'automobile si muove con un'accelerazione costante lungo una traiettoria rettilinea. All'istante iniziale attraversa la prima fotocellula con una velocità di $(10.00 \pm 0.01)\ m \cdot s^{-1}$. Le successive misurazioni sono $t_1 = 0.73 \pm 0.01\ s$ alla distanza di $10.00 \pm 0.01\ m$ e $t_2 = 1.24 \pm 0.01\ s$ alla distanza di $20.00 \pm 0.01\ m$. Calcolare l'accelerazione ed il suo errore nell'ipotesi che l'incertezza sui tempi sia ti tipo statistico mentre sulle lunghezze e sulla velocità è dato l'errore di risoluzione sperimentale.

La relazione che usiamo per calcolare la l'accelerazione è $s(t) = vt + \frac{at^2}{2}$ ovvero

$$a = \frac{2(s - vt)}{t^2}$$

L'errore dominante è quello sulla misura del tempo e quindi convertiamo tutte le altre misure (posizione e velocità) deviazioni standard: $\sigma_v = 0.01/\sqrt{3} \sim 0.006\ m \cdot s^{-1}$ e $\sigma_s = 0.01/\sqrt{3} \sim 0.006$ m e quindi gli trascuriamo poiché gli errori relativi sono pari a:

$$\frac{\sigma_{t_1}}{t_1} = 0.014 \qquad \frac{\sigma_{t_2}}{t_2} = 0.007 \qquad \frac{\sigma_v}{v} \sim 6 \times 10^{-4} \quad \text{e lo stesso per s1}$$

La varianza su a è pari a:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 = \left[\frac{s - 3vt}{t^3}\right]^2 \sigma_t^2$$

Usando i dati a 10 metri le due formule forniscono un risultato pari a:

$$a_1 = (10.13 \pm 0.31) \quad m \cdot s^{-2}$$

ed a 20 metri un risultato pari a:

$$a_2 = (9.89 \pm 0.09) \quad m \cdot s^{-2}$$

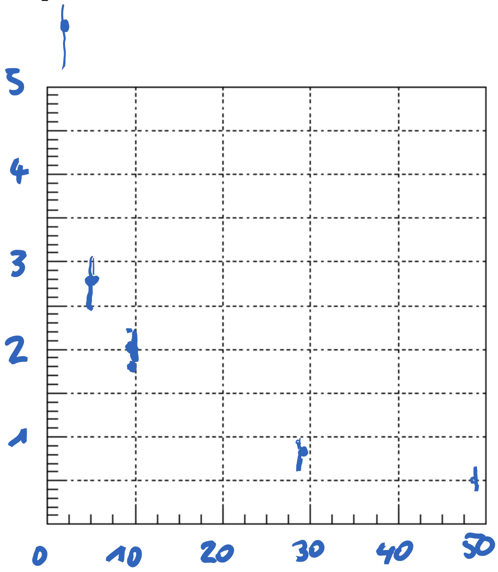
I due risultati sono tra di loro compatibili ($|a_1 - a_2| = 0.24 < 3 \times 0.32 = 3\sqrt{\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_2}^2}$) e posso combinarli facendo una media pesata. Il risultato finale sarà $a = (9.90 \pm 0.09)\ m \cdot s^{-2}$, molto vicino al risultato a 20 m

A

5. Tra le grandezze fisiche X e Y si ipotizza esista la relazione: $Y = ae^{-bX}$. Si hanno a disposizione le seguenti misure di X e Y: (2.1,5.7), (5.2,2.7), (9.4,1.90), (29.8,0.78), (48.3,0.50), con incertezze massime ΔX=0.01 e ΔY=0.1·Y.

a) Determinare i valori di a e di b, ed i corrispondenti errori (formule)

b) Riportare i valori misurati in grafici con scala lineare e semilogaritmica, commentare l'accordo con l'andamento previsto e con eventuali altri andamenti



Il risultato più preciso per b l'ottengo usando il primo e ultimo valore:

$$b = \frac{1}{x_5 - x_0}(\ln y_0 - \ln y_5) \quad e \quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta x_5 + \Delta x_0}{x_5 - x_0} + \frac{\frac{\Delta y_5}{y_5} + \frac{\Delta y_0}{y_0}}{(\ln y_0 - \ln y_5)}$$

Che mi fornisce come risultato $b = 0.053 \pm 0.005$. Ottengo i valori per a usando:

$$a_i = \sqrt[\frac{x_i}{x_0}-1]{\frac{y_0^{x_i/x_0}}{y_i}} = y_0^{\frac{x_i}{x_i - x_0}} y_i^{-\frac{x_0}{x_i - x_0}} \quad con$$

$$\frac{\Delta a_i}{a_i} = \left|\frac{x_0}{x_i - x_0}\right| \frac{\Delta y_i}{y_i} + \left|\frac{x_i}{x_i - x_0}\right| \frac{\Delta y_0}{y_0} + \left|(\ln y_0 + \ln y_5)\frac{x_0}{(x_i - x_0)^2}\right| \Delta x_i + \left|(\ln y_0 + \ln y_5)\frac{x_i}{(x_i - x_0)^2}\right| \Delta x_0$$

Che mi fornisce come risultato, per $i = 5, a = 6.4 \pm 0.7$, avendo usato il fatto che gli errori sulla grandezza X sono trascurabili rispetto alla grandezza Y.

I punti non sono in accordo con l'andamento esponenziale prospettato.