a.a. 2017-2018 **Nome:**

B

1. L'urna U1 contiene 2 palline arancioni e 4 palline di altro colore. L'urna U2 invece contiene una pallina arancione e una di altro colore. Estraiamo una pallina a caso dalla prima urna e la mettiamo nella seconda, poi estraiamo una pallina dalla seconda urna. Con che probabilità la pallina estratta da U2 è arancione? Sapendo che la pallina estratta da U2 è arancione, con che probabilità quella trasferita dalla prima alla seconda urna è arancione?

Indichiamo con A1 l'evento "la pallina estratta dall'urna U1 è arancione" e analogamente A2 per la pallina estratta dall'urna U2. La probabilità di A2 varia a seconda di cosa è successo all'estrazione dalla prima urna, in particolare

$$P(A2|A1) = \frac{2}{3} \quad e \quad P(A2|\overline{A1}) = \frac{1}{3}$$

Data la composizione iniziale dell'urna U1, si ha $P(A1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (e quindi $P(\overline{A1}) = \frac{2}{3}$). Possiamo quindi trovare $P(A2)$ usando la legge delle probabilità composte:

$$P(A2) = P(A2|A1) \cdot P(A1) + P(A2|\overline{A1}) \cdot P(\overline{A1}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Per il secondo quesito possiamo usare la formula di Bayes:

$$P(A1|A2) = \frac{P(A2|A1) \cdot P(A1)}{P(A2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$$

2. In misure ripetute di una grandezza fisica X le cui fluttuazioni si suppone siano trascurabili rispetto alla risoluzione di lettura degli strumenti utilizzati sono stati ottenuti i seguenti valori:

$x_1=(1.19\pm0.02)u_x$, $x_2=(1.22\pm0.02)u_x$, $x_3=(0.93\pm0.02)u_x$,
$x_4=(0.98\pm0.02)u_x$, $x_5=(1.45\pm0.02)u_x$, $x_6=(0.92\pm0.02)u_x$.

- Scrivere le formule da utilizzare per ottenere

la deviazione standard della distribuzione delle misure

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

la miglior stima del valore della grandezza fisica

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

il suo errore

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$$

Calcolare i valori numerici e commentarli confrontandoli con i 6 valori iniziali:

$$\bar{x} = 1.11 \pm 0.09\ u_x \qquad \sigma = 0.21\ u_x \quad \sigma_{\bar{x}} = 0.09\ u_x$$

Le 6 misure single sono contenute nell'intervallo $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ ovvero $[0.48, 1.74]$ e quindi il campione delle misure iniziali ha tutti valori tra loro compatibili

Per la stessa grandezza fisica, misure diverse avevano dato i risultati $X_2=(1.30\pm0.04)u_x$ e $X_3=(1.311\pm0.001)u_x$. Discutere la compatibilità dei tre risultati sapendo che gli errori quotati sono tutti statistici e calcolare il valore di X usando le 3 misure

La compatibilità del risultato da noi trovato con le misure in questione è:

$$|\bar{x} - X_1| < 3\sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{X_1}^2} \text{ ovvero } 0.19 < 3 \times 0.09 = 0.27 \text{ (compatibili)}$$

$$|\bar{x} - X_2| < 3\sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{X_2}^2} \text{ ovvero } 0.20 < 3 \times 0.09 = 0.27 \text{ (compatibili)}$$

Le due misure date sono anche compatibili tra loro

$$|X_1 - X_2| < 3\sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2} \text{ ovvero } 0.01 < 3 \times 0.04 = 0.12$$

B

3. La variabile casuale x può assumere valori nell'intervallo (0.,1.), in cui la sua funzione di distribuzione è $f(x) = c\sqrt{x}$. Determinare

- il valore di c

$$c\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 1 \Rightarrow -c\frac{2}{3}\int_0^1 dx^{\frac{3}{2}} = c\frac{2}{3} = 1 \quad \text{i. e.} \quad c = \frac{3}{2}$$

- valore di aspettazione e deviazione standard

$$\mu = \frac{3}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 dx^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} = 0.60$$

Per la deviazione standard usiamo la proprietà dei valori di aspettazione: $E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2 = \frac{3}{2}\int_0^\infty x^2\sqrt{x}\,dx - \frac{9}{25}$

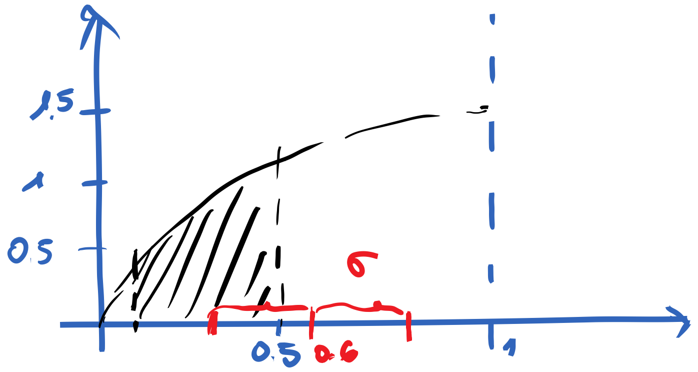
$$\frac{3}{2}\int_0^\infty x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{7}\int_0^1 dx^{\frac{7}{2}} = \frac{3}{7}$$

Per cui la deviazione standard risulta $\sigma = \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{9}{25}} = 0.26$

- la probabilità che la variabile casuale assuma un valore in (0.10,0.50)

$$\frac{3}{2}\int_{0.1}^{0.5}\sqrt{x}\,dx = \int_{0.1}^{0.5} dx^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.1}^{0.5} = 0.5^{\frac{3}{2}} - 0.1^{\frac{3}{2}} = 0.35 - 0.03 = 0.32$$

Verificare graficamente i risultati ottenuti



4. Un oggetto che viene lanciato verso l'alto con una velocità v raggiunge un'altezza massima h data da:

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

dove la costante $g = (9,81 \pm 0,02)\ m \cdot s^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. Per ciascuno dei seguenti casi:

a) $v = (10,3 \pm 0,3)\ m/s$;

b) $v = (10,274 \pm 0,005)\ m/s$.

Con le incertezze che sono di tipo statistico. Calcolare l'altezza raggiunta dall'oggetto e la relativa incertezza (anche relativa) nei due casi.

L'incertezza sull'altezza, in termini di deviazione standard di ottiene usando la legge di propagazione della varianza:

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2$$

O, ancora più semplicemente usando la legge di propagazione degli errori relativi:

$$\frac{\sigma_h^2}{h^2} = 4\frac{\sigma_v^2}{v^2} + \frac{\sigma_g^2}{g^2}$$

Usando questo ottengo, nei due casi:

$$\frac{\sigma_h^2}{h^2} = 4\frac{0,3^2}{10,3^2} + \frac{0,02^2}{9,81^2} = 0.0034 \quad e \quad \frac{\sigma_h^2}{h^2} = 4\frac{0,005^2}{10,274^2} + \frac{0,02^2}{9,81^2} = 0.000041$$

che fornisce:

$$\frac{\sigma_h}{h} = 0.06 \quad e \quad \frac{\sigma_h}{h} = 0.002$$

e per l'altezza

$$h_1 = 5.4 \pm 0.3 \quad e \quad h_2 = 5.38 \pm 0.01$$

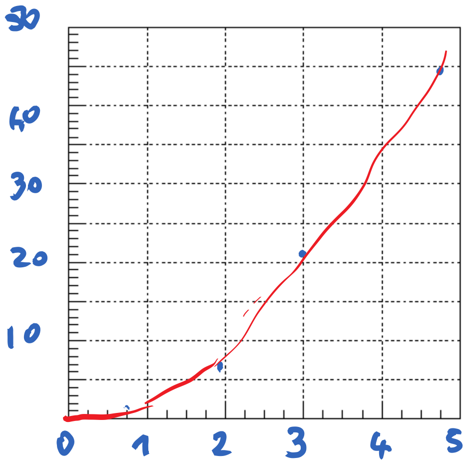
Con i due errori dominati nel primo caso dall'errore sulla velocità e nel secondo caso da quello sull'accelerazione di gravità.

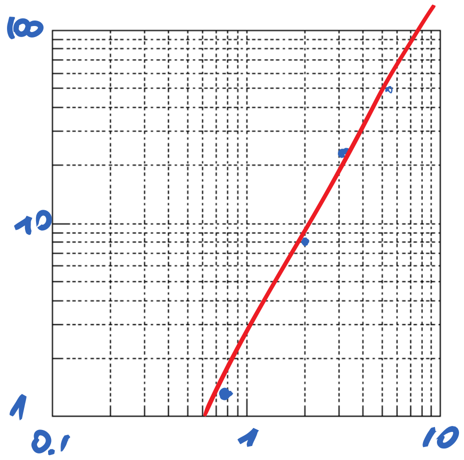
B

5. Tra le grandezze fisiche X e Y si ipotizza esista la relazione: $Y = mX^2$. Si hanno a disposizione le seguenti misure di X e Y: (0.810,1.22), (1.920,7.94), (3.100,21.1), (4.900,44.6), con incertezze massime assolute di 0.001 per X, e incertezze statistiche relative di 0.1 per Y.

1. Riportare i valori misurati nei grafici con scale lineari e log-log, e commentare l'accordo con l'andamento previsto
2. Scrivere le formule necessarie per calcolare valore e incertezza di *m*

   facoltativo:
3. Fare i calcoli e riportare nei grafici la curva corrispondente





Per m e σ_m uso:

$$m_i = \frac{Y_i}{X_i^2} \quad e \quad \sigma_{m_i}^2 = \frac{\sigma_{Y_i}^2}{X_i^4} + 4\frac{Y_i^2 \sigma_{X\,i}^2}{X_i^6} \quad \text{oppure} \quad \frac{\sigma_{m_i}^2}{m_i^2} = \frac{\sigma_{Y_i}^2}{Y_i^2} + 4\frac{\sigma_{X_i}^2}{X_i^2}$$

Ottengo la seguente tabella di valori per m_i e varianze $\sigma_{m_i}^2$

m	1.86	2.15	2.20	1.86
σ_m	0.19	0.22	0.22	0.19

Da cui posso ottenere il valore finale usando la media pesata:

$$m = \frac{\sum_{i=0}^{4} \frac{m_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{m_i}{\sigma_i^2}} \quad e \quad \sigma_m^2 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Che mi fornisce una valore finale pari a $m = 2.0 \pm 0.1$.

I valori forniti seguono l'andamento atteso.