CAPITOLO 3

RICHIAMI SULL'ANALISI DIMENSIONALE, SIMILITUDINI E PROVE SPERIMENTALI SU MODELLO IN SCALA

3.1 - INTRODUZIONE

Le equazioni che governano il moto di un fluido hanno il grave difetto di avere pochissime soluzioni analitiche in forma chiusa e cioè esistono pochi casi in cui la geometria, il fluido impiegato, le condizioni iniziali etc. … danno luogo ad un flusso descrivibile da una espressione matematica soluzione esatta delle equazioni citate. Spesso, pertanto, si utilizzano soluzioni approssimate basate su particolari ipotesi che devono trovare poi conferma dal punto di vista fisico (ad es. trascurare la viscosità, …).

E' per questo motivo che nel campo della fluidodinamica molto è stato fatto dal punto di vista sperimentale, cercando di apprendere dai risultati di queste prove il comportamento del fluido e le azioni sugli oggetti investiti dal suo flusso per poi confrontare questi risultati con quelli teorici approssimati. In ogni caso l'approccio sperimentale necessita di una solida base teorica per individuare quali sono i parametri che intervengono in maniera determinante nel fenomeno studiato e per valutare gli effetti scala quando la prova è condotta su modello.

Oltre a consentire di formulare le equazioni del moto del fluido in termini adimensionali e ad affrontare le prove sperimentali secondo i criteri citati, l'analisi dimensionale e l'utilizzo dei numeri caratteristici Π_i risulta estremamente utile per individuare e valutare gli effetti delle eventuali semplificazioni che si fanno alle equazioni del moto dei fluidi per arrivare a modelli ingegneristicamente utili e computazionalmente accettabili.

3.2 - TEOREMA Π DI BUCKINGHAM

Consideriamo un generico problema fisico in cui la variabile dipendente q_1 è funzione di n-1 variabili indipendenti q_i. L'espressione funzionale è pertanto

$$q_1 = f(q_2, q_3, ..., q_n) \qquad (3.2.1)$$

che possiamo anche scrivere nella forma implicita

$$g(q_1, q_2, q_3, ..., q_n) = 0 \tag{3.2.2}$$

Il Teorema **Π** dice che data questa relazione implicita tra n parametri, allora gli n parametri possono essere raggruppati in n-m rapporti adimensionali indipendenti, anche detti parametri **Π,** e l'espressione funzionale in forma implicita diventa

$$\boxed{G(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{n-m}) = 0} \tag{3.2.3}$$

Il numero m è generalmente, ma non sempre, pari al numero minimo di dimensioni indipendenti (massa, spazio, tempo, temperatura, carica elettrica, …) necessarie a definire tutti i parametri q_i che si ritiene intervengano nel fenomeno. Un parametro $\mathbf{\Pi}_i$ non è indipendente se lo si può ottenere dal prodotto o rapporto di potenze degli altri parametri **Π.** N.B. Ciascuno dei **Π** è adimensionale e pertanto è sempre scrivibile come prodotto delle dimensioni scelte elevate alla potenza 0, ad es. $\Pi_1 = M^0 L^0 t^0$.

Per determinare le espressioni dei parametri Π, si opera come segue.

1. Scrivere la lista di tutti gli n parametri in gioco.
2. Individuare le r dimensioni principali necessarie a definire i parametri.
3. Valutare m: di solito è pari a r, ma non sempre (vedi Esempi 1 e 2).
4. Selezionare m parametri tra gli n disponibili (detti *parametri ripetitivi*) che includano tutte le r dimensioni principali.
5. Scrivere n-m equazioni dimensionali per ogni $\Pi_{i=1,n-m}$ definendo Π_i come prodotto di potenze degli r parametri e, a rotazione, di uno dei parametri rimanenti.
6. Dall'uguaglianza degli esponenti delle potenze delle dimensioni caratteristiche a sinistra e a destra dell'equazione, si ottengono i valori delle singole potenze utilizzate.

Si rimanda al Corso di Architettura Navale I (Idrodinamica) per una carrellata di esempi utili.

In questa sede viene messo in evidenza un caso mirato agli obiettivi di questo Corso.

Esempio 1

Analizziamo ora il caso di un oggetto investito da un flusso periodico (di periodo T) e di massima intensità pari a V. Concentriamo l'attenzione sulla forza R prodotta dal flusso stesso sull'oggetto. La relazione funzionale, potrebbe essere la seguente

$$\mathrm{R} = \mathrm{f}(\rho, \mu, \mathrm{V}, \mathrm{D}, \mathrm{g}, \mathrm{T})$$

1. Dunque *n*=7.
2. Le dimensioni dei parametri sono:

$$\mathrm{R} = \left[\mathrm{M}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}^2}\right],\quad \rho = \left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}\right],\quad \mu = \left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}\cdot\mathrm{t}}\right],\quad \mathrm{V} = \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}}\right],\quad \mathrm{g} = \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}^2}\right],\quad \mathrm{D} = [\mathrm{L}],\quad \mathrm{T} = [\mathrm{t}]$$

   Per definire le dimensioni di tutti i 7 parametri selezionati, abbiamo dunque bisogno di *r*=3 dimensioni (massa *M*, spazio *L* e tempo *t*).
   Ci chiediamo quanto vale *m*. Per ottenere la risposta, dovremmo eseguire la stessa procedura fatta nell'Esempio 2. In questo caso la matrice ha solamente una colonna in più, quella relativa al periodo T e pertanto il rango sarà sicuramente lo stesso dell'Esempio 2 *m*=3.
3. Scegliamo *m*=*r*=3 *parametri ricorrenti:* ad es. *ρ, V, D.*
4. Allora si avrà

$$\boxed{\mathrm{G}(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0}$$

   Le *n*-*m*=4 equazioni sono:

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c R = \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \left[\frac{L}{t}\right]^b [L]^c \left[M\frac{L}{t^2}\right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu = \left[\frac{M}{L^3}\right]^d \left[\frac{L}{t}\right]^e [L]^f \left[\frac{M}{Lt}\right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_3 = \rho^g V^h D^i g = \left[\frac{M}{L^3}\right]^g \left[\frac{L}{t}\right]^h [L]^i \left[\frac{L}{t^2}\right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_4 = \rho^j V^k D^l T = \left[\frac{M}{L^3}\right]^j \left[\frac{L}{t}\right]^k [L]^l [t] = M^0 L^0 t^0$$

da cui

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a+1=0 \\ -3a+b+c+1=0 \\ -b-2=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \Pi_1 = \frac{R}{\rho V^2 D^2}$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} d+1=0 \\ -3d+e+f-1=0 \\ -e-1=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} d=-1 \\ e=-1 \\ f=-1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} g=0 \\ -3g+h+i+1=0 \\ -h-2=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} g=0 \\ h=-2 \\ i=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \Pi_3 = \frac{gD}{V^2}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{t} \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{j}=0 \\ -3\mathrm{j}+\mathrm{k}+\mathrm{l}=0 \\ -\mathrm{k}+1=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{j}=0 \\ \mathrm{l}=-1 \\ \mathrm{k}=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \Pi_4 = \frac{\mathrm{VT}}{\mathrm{D}}$$

per cui

$$\boxed{\frac{R}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}, \frac{gD}{V^2}, \frac{VT}{D}\right)}$$

I numeri adimensionali $\frac{\rho VD}{\mu}$, $\frac{V}{\sqrt{gD}}$ sono rispettivamente il Numero di Reynolds e di Froude.

Il numero adimensionale $\frac{VT}{D}$ è detto Numero di Keulegan-Carpenter.

3.3 NUMERI ADIMENSIONALI PRINCIPALI

L'analisi dimensionale risulta di fondamentale importanza in fluidodinamica nella comprensione dei fenomeni fisici. Si è visto infatti nel Capitolo dedicato alle equazioni che governano il moto dei fluidi che il moto del volume elementare è determinato dalla somma algebrica di molte componenti di forza, tra cui quella inerziale, la viscosa, quella di pressione, le forze di volume (ad es. la forza di gravità), le tensioni superficiali (all'interfaccia tra fluido e solido), … . Alla luce dell'analisi dimensionale, è molto interessante evidenziare il rapporto tra le forze di inerzia e le restanti componenti di forza.

- Forze inerziali $M\dfrac{L}{t^2} \propto \rho V^2 L^2 \propto \rho L^3 \dfrac{V}{T}$
- Forze viscose $\tau A \propto \mu V L$
- Forze di pressione $\Delta p A \propto \Delta p L^2$
- Forze di gravità $Mg \propto \rho L^3 g$
- Forze di tensione superficiale σL
- Forze inerziali time dependent $\rho L^3 \dfrac{V}{T}$
- Forze di drag time dependent $\rho L^2 V^2$

$\dfrac{\text{Forze inerziali}}{\text{Forze viscose}} = \dfrac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \dfrac{\rho V L}{\mu} = Re$	Re = N° di Reynolds
$\dfrac{\text{Forze inerziali}}{\text{Forze di gravità}} = \dfrac{\rho V^2 L^2}{\rho L^3 g} = \dfrac{V^2}{Lg} = Fr^2$	Fr = N° di Froude
$\dfrac{\text{Forze di pressione}}{\text{Forze inerziali}} = \dfrac{\Delta p L^2}{0.5 \rho V^2 L^2} = \dfrac{\Delta p}{0.5 \rho V^2} = Eu = Cp$	Eu = N° di Eulero
$\dfrac{\text{Forze inerziali}}{\text{Forze di ten.sup.}} = \dfrac{\rho V^2 L^2}{\sigma L} = \dfrac{\rho V^2 L}{\sigma} = We$	We = N° di Weber
$\dfrac{\text{Forze viscose t.d.}}{\text{Forze inerziali t.d.}} = \dfrac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 \dfrac{V}{T}} = \dfrac{VT}{L} = KC$	KC = N° di Keulegan-Carpenter

Rispetto a quanto visto in *A.N. I (Idrodinamica)* la novità è il numero KC di Keulegan-Carpenter. KC può essere pensato anche come rapporto tra due distanze, rispettivamente VT ed L, dove VT è pensata come una distanza percorsa alla velocità di riferimento V nel tempo caratteristico T. Se tale rapporto è grande significa che la distanza VT è grande rispetto alla dimensione del corpo e quindi il campo di moto del fluido tende ad avvicinarsi a quello del flusso stazionario ($T \rightarrow \infty$). In tale situazione le forze viscose in gioco (soprattutto di pressione di origine viscosa = separazione su oggetti tozzi) tendono ad essere dominanti. Se viceversa *KC* è piccolo il fluido tende a percorrere una piccola distanza nell'arco del tempo *T* e quindi il rischio di separazione è ridotto al minimo pertanto prevalgo le forze di natura inerziale.

Come esempio, applichiamo il numero di *Keulegan-Carpenter* al caso di un cilindro che fora la superficie libera ed è investito da un treno d'onde piane regolari (Airy).

$$KC = \frac{UT}{D} \tag{3.3.1}$$

In tal caso il flusso incidente è quello delle onde di Airy quindi

$$u(X,Y,t) = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{H}{2}\frac{gk}{\omega}\frac{\cosh[k(d+Y)]}{\cosh[kd]}\cos(kX-\omega t) \tag{3.3.2}$$

e quindi la massima intensità si ha per *Y=0* e vale

$$U = \frac{H}{2}\frac{gk}{\omega} = \frac{H}{2}g\frac{T}{\lambda} \tag{3.3.3}$$

Assumendo che la pendenza dell'onda sia la più alta possibile al limite del breaking, allora $H/\lambda \approx 1/7$

Dunque

$$U_{MAX} \approx \frac{gT}{14} \tag{3.3.4}$$

e quindi

$$KC_{MAX} = \frac{U_{MAX}T}{D} \approx \frac{gT}{14}\cdot\frac{T}{D} \tag{3.3.5}$$

e ricordando la relazione di dispersione per *deep water* che fornisce la max lunghezza d'onda a parità di periodo

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} tanh\left[\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \approx \frac{gT^2}{2\pi} \qquad (3.3.6)$$

sostituendo otteniamo

$$KC_{MAX} = \frac{U_{MAX}T}{D} \approx \frac{gT}{14} \cdot \frac{T}{D} = \frac{2\pi\lambda}{14D} \approx 0.45\frac{\lambda}{D} \qquad (3.3.7)$$

Se ad es. $\frac{\lambda}{D} = 5$, $KC_{MAX} \approx 2.2$ e cioè KC assume un valore molto basso in cui gli effetti viscosi risultano deboli. Dalla sperimentazione e dalle simulazioni si può osservare che la soglia $\frac{\lambda}{D} = 5$ è un valore tipico oltre al quale la presenza del corpo distorce poco la formazione ondosa su larga scala, mentre per valori inferiori si osserva che le onde vengono fortemente distorte dalla presenza del corpo, con deviazione delle linee delle creste e cambi di fase. In quest'ultimo caso si parlerà di flusso in regime di diffrazione d'onda.

Il numero adimensionale $kD = \frac{2\pi D}{\lambda}$ è anche detto "indice di diffrazione" e corrisponde, a meno di una costante, al reciproco del numero di *KC* nelle ipotesi di flusso incidente massimo di Airy.

Altri numeri adimensionali importanti per l'argomento "carichi d'onda" sono:

$\frac{\text{Dimensione caratteristica}}{\text{Lunghezza d'onda}} = 2\pi\frac{L}{\lambda} = kL$	kL = indice di diffrazione
$\frac{\text{frequenza di rilascio di vortici.}}{\text{frequenza caratteristica}} = \frac{f}{\left(\frac{V}{L}\right)} = \frac{f \cdot L}{V} = St$	St = N° di Strouhal