Università degli Studi di Trieste
Facoltà di Ingegneria

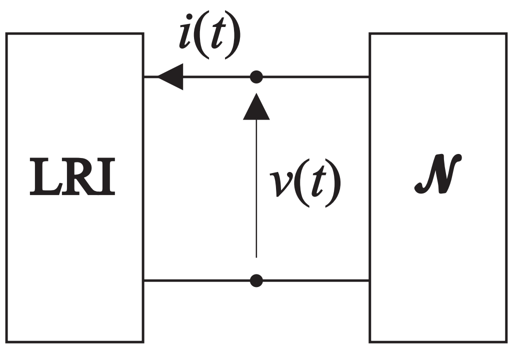
APPUNTI del CORSO di ELETTROTECNICA

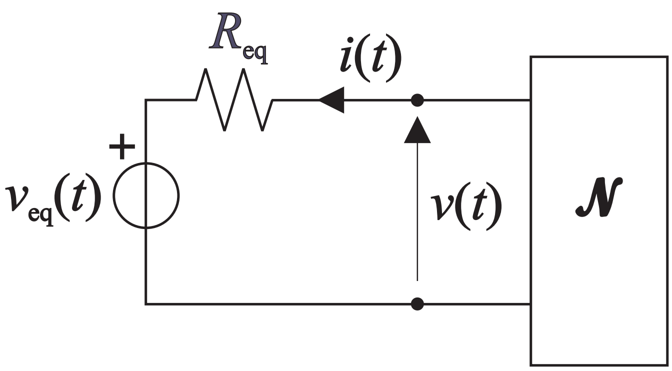
Metodi di Analisi
Trasformatore ideale
Mutue induttanze

a.a. 2016-2017

Teorema di Thevenin

- Consideriamo un bipolo LRI collegato al resto del circuito tramite due terminali





$$v(t) = R_{eq}i(t) + v_{eq}(t)$$

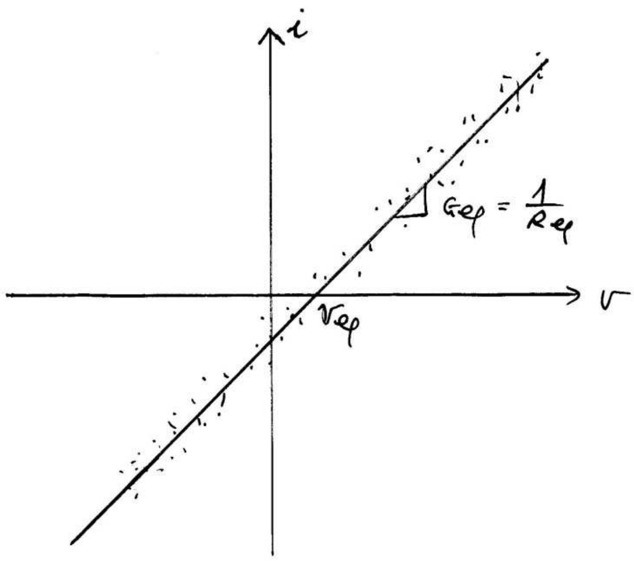
Teorema di Thevenin (2)

- Ogni bipolo LRI ben posto e controllato in corrente può essere sostituito con la serie di un generatore ideale di tensione e di una resistenza, calcolati opportunamente, senza influenzare la soluzione di un qualsiasi circuito esterno connesso al bipolo stesso.

- R_{eq}: si calcola spegnendo tutti i generatori indipendenti (di tensione: corto circuito, di corrente: circuito aperto)
- $v_{eq}(t)$: tensione a vuoto ai morsetti con tutti i generatori inseriti

Teorema di Thevenin (3)

- La caratteristica di un bipolo LRI è



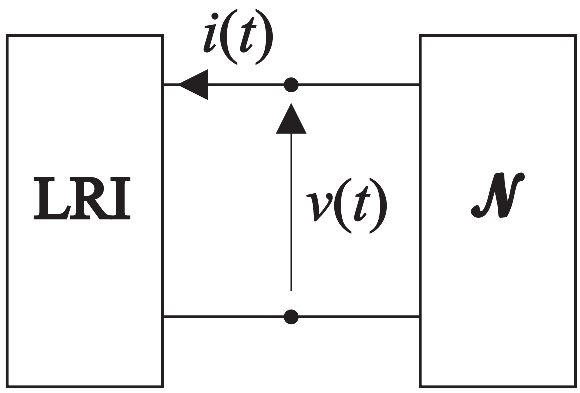
- Se la caratteristica deve essere la stessa in entrambi i casi, l'equazione diventa (R_{eq} ruota la retta, $v_{eq}(t)$ la trasla)

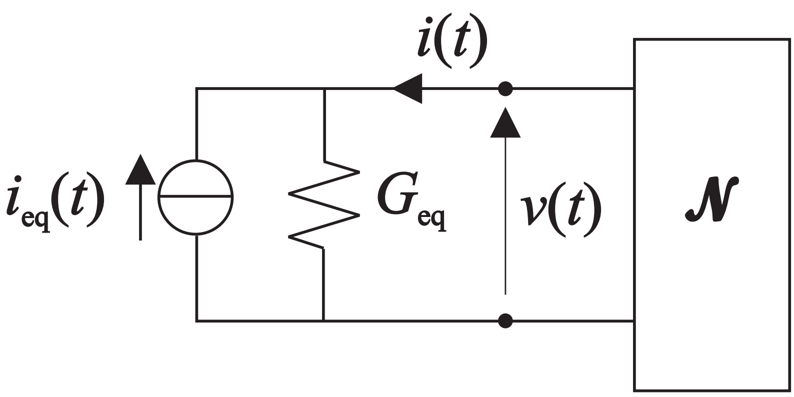
$$v(t) = R_{eq}\, i(t) + v_{eq}(t)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_{eq}} - \frac{v_{eq}(t)}{R_{eq}}$$

Teorema di Norton

- Consideriamo un bipolo LRI collegato al resto del circuito tramite due terminali





$$i(t) = G_{eq} v(t) - i_{eq}(t)$$

Teorema di Norton (2)

- Ogni bipolo LRI ben posto e controllato in tensione può essere sostituito con il parallelo di un generatore ideale di corrente e di una conduttanza, calcolati opportunamente, senza influenzare la soluzione di un qualsiasi circuito esterno connesso al bipolo stesso.

- G_{eq}: si calcola spegnendo tutti i generatori indipendenti (tensione: corto circuito, corrente: circuito aperto)
- $i_{eq}(t)$: corrente di corto circuito ai morsetti con tutti i generatori inseriti

Thevenin e Norton

- Tutti i bipoli LRI descritti da una caratteristica obliqua hanno entrambi gli equivalenti

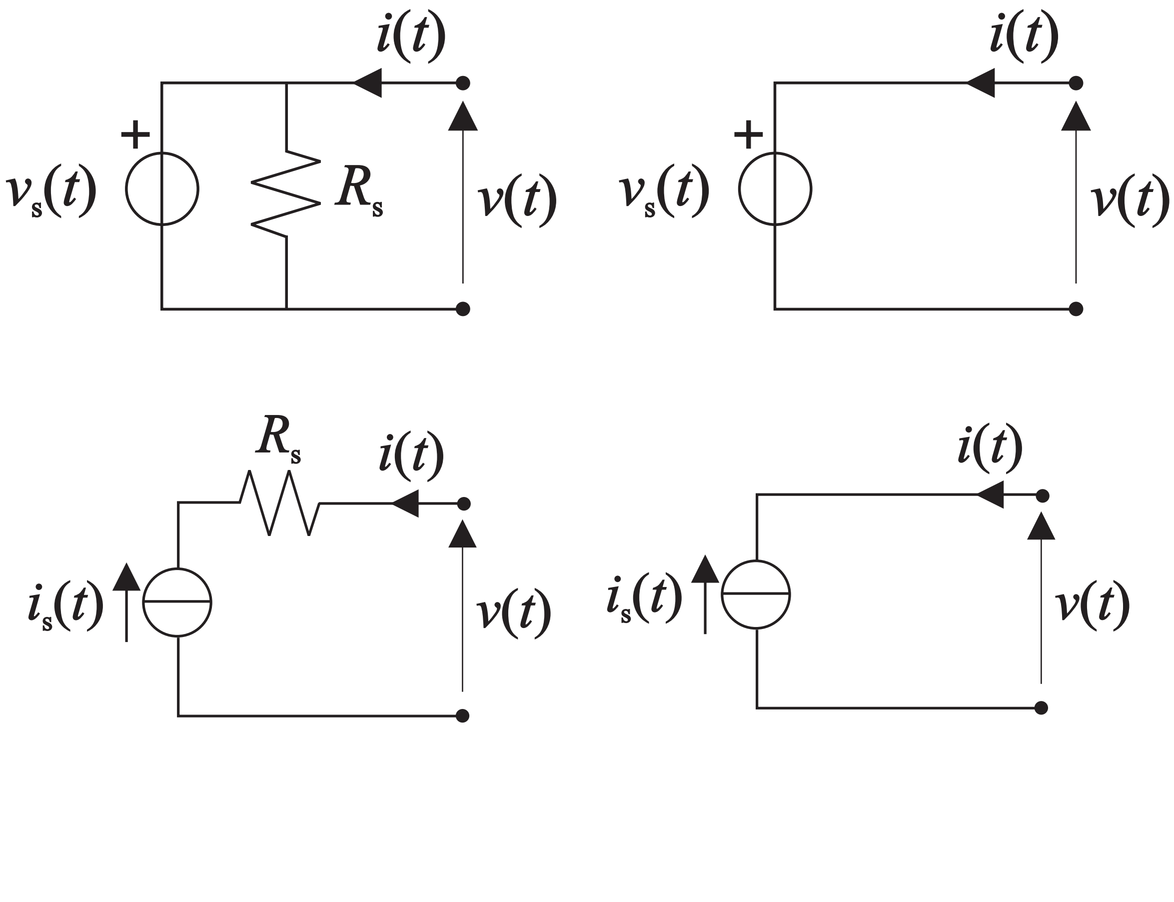
- La relazione tra i parametri delle rappresentazioni (vedi retta nella slide precedente) sono

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$$

$$i_{eq}(t) = \frac{v_{eq}(t)}{R_{eq}} = v_{eq}(t)\,G_{eq}$$

Sorgenti indipendenti ideali

- Fanno eccezione i bipoli la cui retta è verticale o orizzontale (sorgenti ideali di tensione con in parallelo una resistenza e sorgenti ideali di corrente con in serie una resistenza)



Thevenin, Norton e fasori

- Per i bipoli LDI si ricorre ai fasori; gli equivalenti di Thevenin e di Norton si trovano con le stesse regole, sostituendo le impedenze e le ammettenze alle resistenze e alle conduttanze, rispettivamente, e i fasori alle grandezze nel dominio del tempo

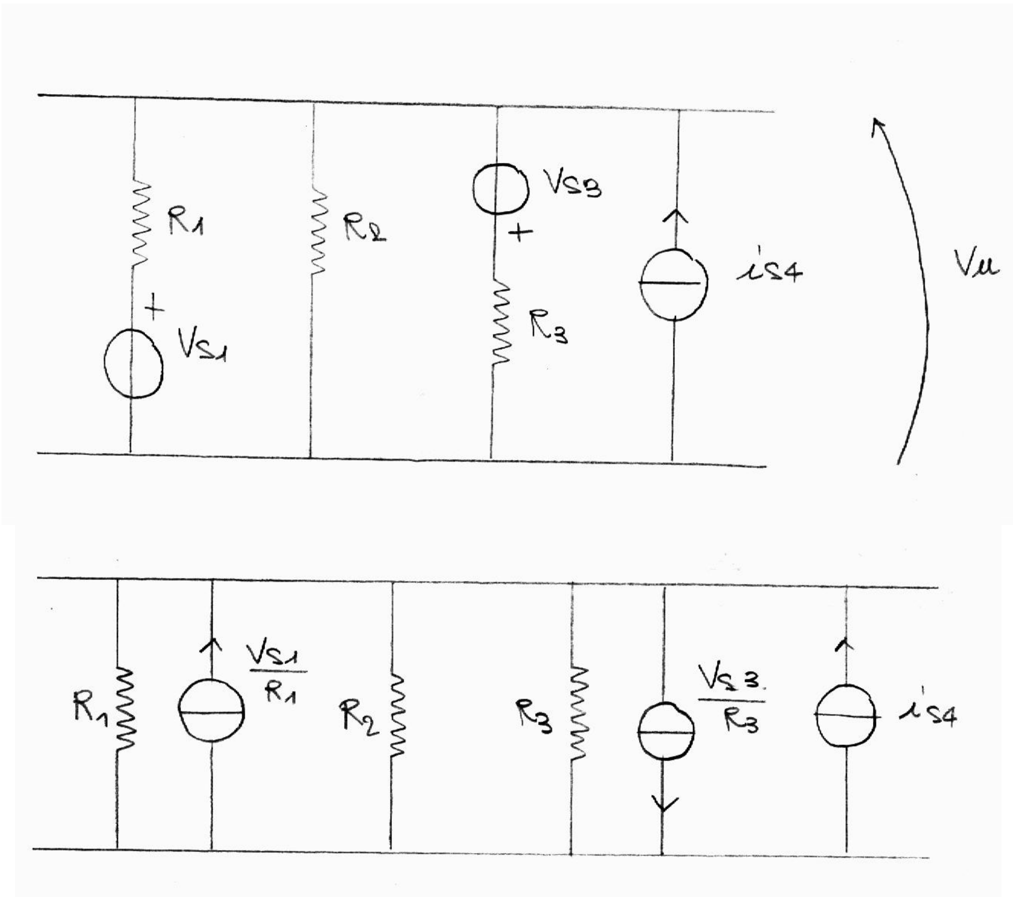
$$\bar{V} = Z_{eq}\bar{I} + \bar{V}_{eq}$$

$$\bar{I} = Y_{eq}\bar{V} - \bar{I}_{eq}$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}}, \qquad \bar{I}_{eq} = \frac{\bar{V}_{eq}}{Z_{eq}} = \bar{V}_{eq}Y_{eq}$$

Teorema di Millmann

- È un'applicazione del teorema di Norton



$$v_u = \frac{\dfrac{v_{s1}}{R_1} - \dfrac{v_{s3}}{R_3} + i_{s4}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$$

Metodi dei nodi puro

- È un derivato del tableau. Le variabili del sistema sono i potenziali di nodo e_k, k=1…n-1
- È limitato ai circuiti che contengono componenti controllati in tensione
- Nel dominio del tempo (circuiti LRI), si ottiene

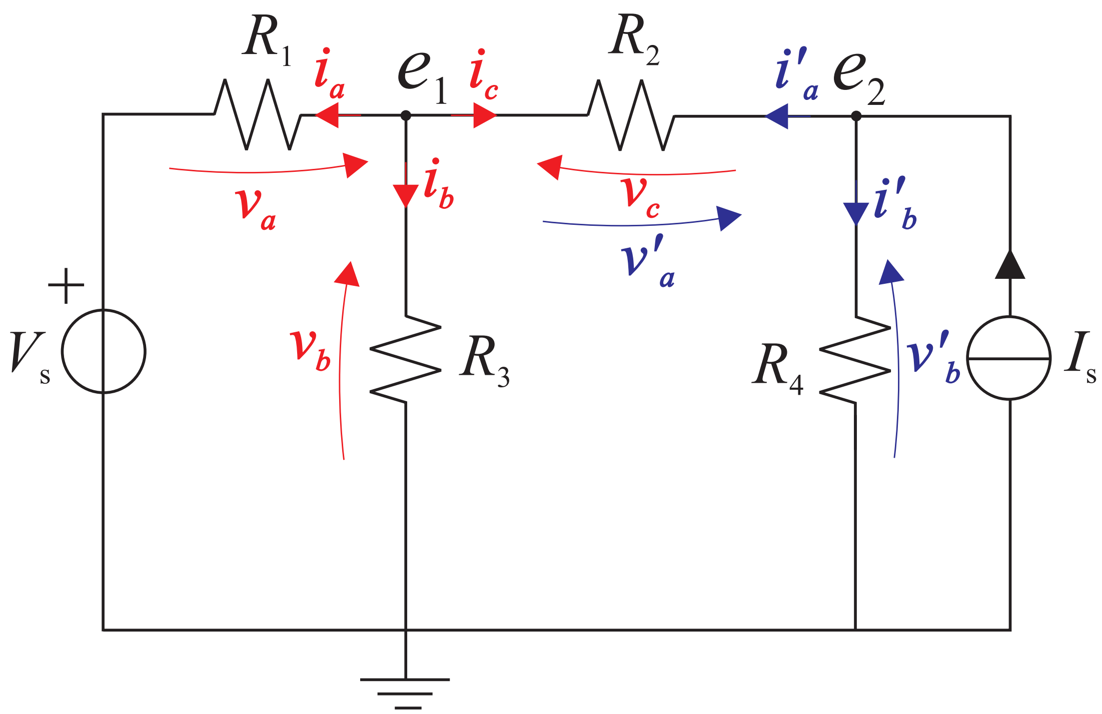
$$\mathbf{G}^{nod}\mathbf{e}(t) = \mathbf{h}_{\mathrm{s}}(t)$$

- Con $\mathbf{e}(t)$ e $\mathbf{h}_s(t)$ vettori colonna $[n-1\times 1]$ e $\mathbf{G}_{nod}$ matrice $[n\times n]$
- Se $\det(\mathbf{G}^{\mathrm{nod}}) \neq 0$, il circuito è ben posto, come nel tableau. $\mathbf{G}^{\mathrm{nod}}$ è simmetrica se nel circuito ci sono solo bipoli.
- Nei circuiti LDI in alternata, utilizzando i fasori si ottiene

$$\mathbf{Y}^{nod}\,\overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{H}}_s$$

Metodi dei nodi puro - esempio

- Scriviamo le due equazioni ai nodi per il circuito LRI di figura alimentato in continua



- Nodo 1:

$$\text{IK)} \quad i_a + i_b + i_c = 0$$

$$\text{cost)} \; i_a = v_a G_1, \; i_b = v_b G_3, \; i_c = v_c G_2$$

$$\text{IIK)} \; v_a = e_1 - V_s, \; v_b = e_1, \; v_c = e_1 - e_2$$

$$(e_1 - V_s) G_1 + e_1 G_3 + (e_1 - e_2) G_2 = 0$$

Metodi dei nodi puro – esempio (2)

- Nodo 2:

$$\begin{aligned}
&\text{IK)} \quad i'_a + i'_b = I_s \\
&\text{cost)}\ i'_a = v'_a\, G_2,\ i'_b = v'_b\, G_4 \\
&\text{IIK)}\ v'_a = e_2 - e_1,\ v'_b = e_2
\end{aligned}$$

$$(e_2 - e_1)G_2 + e_2 G_4 = I_s$$

- Raccogliendo i coefficienti si ottiene

$$\begin{cases} e_1(G_1 + G_2 + G_3) - e_2 G_2 = V_s G_1 \\ -e_1 G_2 + e_2(G_2 + G_4) = I_s \end{cases}$$

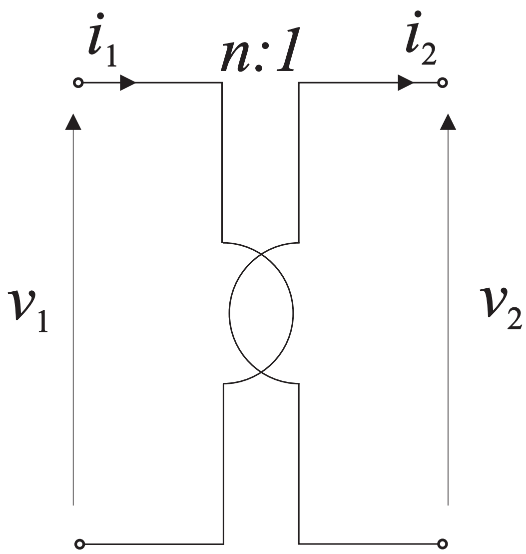
- In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s G_1 \\ I_s \end{bmatrix}$$

- N.B. matrice $\mathbf{G}^{nod}$ simmetrica

Trasformatore ideale

- È un componente resistivo a due porte



- n: rapporto di trasformazione

$$\begin{cases} v_1 = n\, v_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n}\, i_2 \end{cases}$$

- È un componente non-controllato in tensione

Trasformatore ideale (2)

- Proprietà fondamentale: è un componente inerte

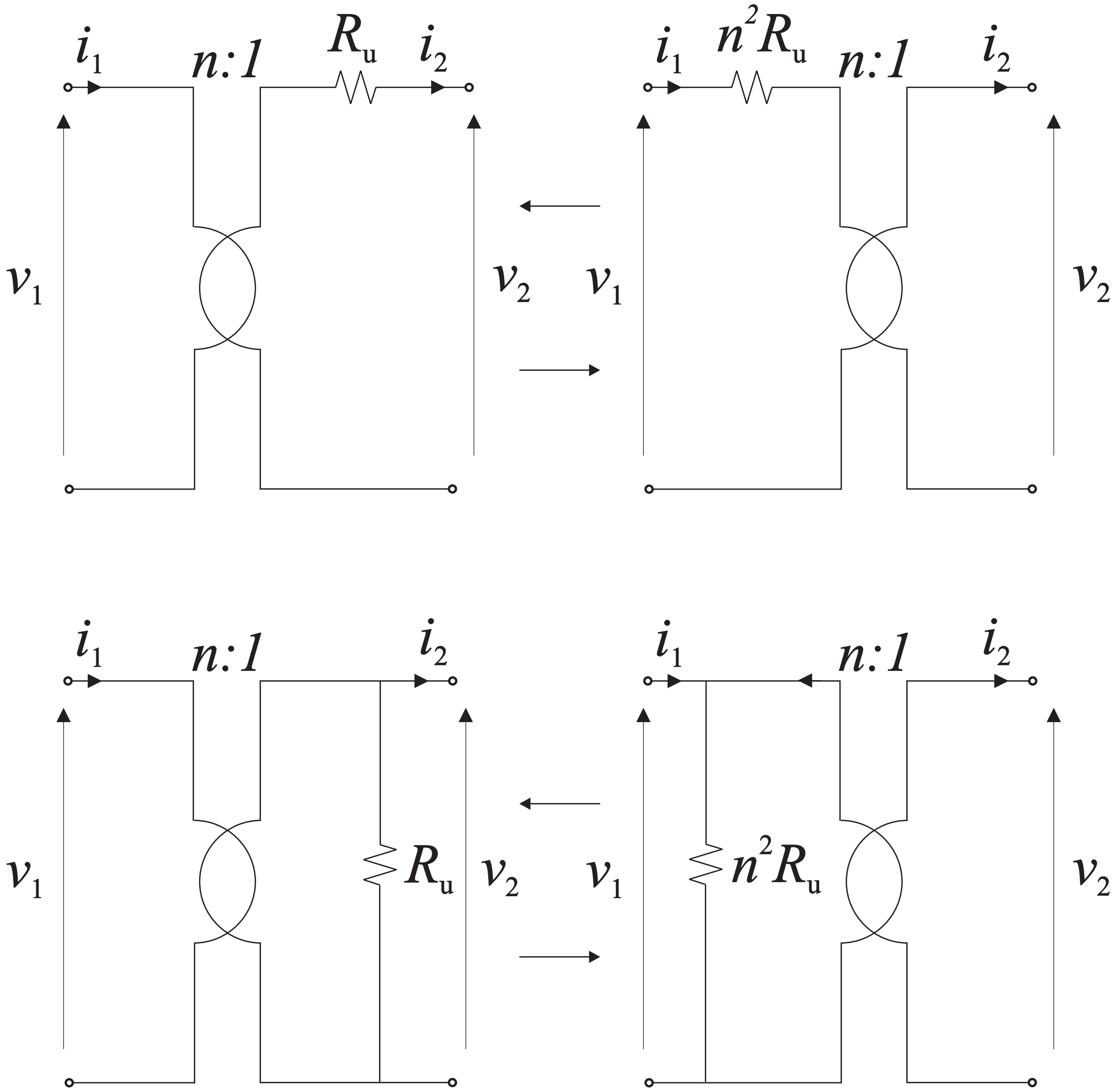
$$p(t) = v_1 \, i_1 - v_2 \, i_2 = n v_2 \left(\frac{1}{n} i_2 \right) - v_2 \, i_2 = 0$$

- Proprietà di adattamento di impedenza: consideriamo un trasformatore chiuso su una resistenza R_u

$$R_{ing} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{n v_2}{\frac{1}{n} i_2} = n^2 \frac{v_2}{i_2} = n^2 R_u$$

Trasformatore ideale (3)

- Si dimostra che valgono pure le seguenti proprietà di spostamento delle resistenze tra le porte, per cui i seguenti circuiti risultano equivalenti

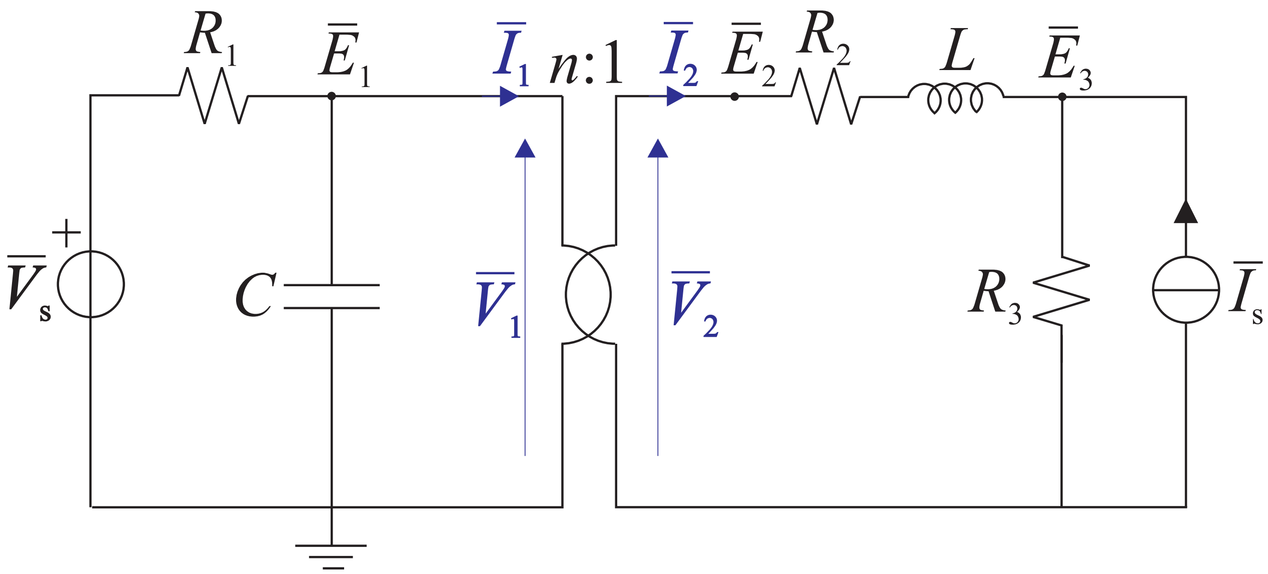


Metodi dei nodi modificato (MNA)

- È il metodo principe dei programmi di analisi dei circuiti
- La presenza di uno o più trasformatori ideali viene risolta aggiungendo le relative correnti di ramo nelle equazioni di nodo. Le incognite sono quindi i potenziali di nodo e le correnti dei trasformatori. Il numero delle variabili aumenta, ma il metodo modificato risulta essere così assolutamente generale
- Per equilibrare il numero di incognite e di equazioni, si devono aggiungere al sistema puro le relazioni costitutive dei trasformatori ideali

Metodi dei nodi modificato - esempio

- Scriviamo le equazioni ai nodi per il circuito LDI di figura alimentato in alternata



- Il trasformatore ideale è un componente a due porte non-controllato in tensione. Infatti le equazioni sono (con i fasori)

$$
\begin{cases}
\overline{V}_1 = n\overline{V}_2 \\
\overline{I}_1 = \dfrac{1}{n}\overline{I}_2
\end{cases}
$$

Metodi dei nodi modificato – esempio (2)

- Si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\overline{E}_1 - \overline{V}_s\right)}{R_1} + \overline{E}_1 j\omega C + \overline{I}_1 = 0 \\ -\overline{I}_2 + \dfrac{\left(\overline{E}_2 - \overline{E}_3\right)}{R_2 + j\omega L} = 0 \\ \dfrac{\left(\overline{E}_3 - \overline{E}_2\right)}{R_2 + j\omega L} + \dfrac{\overline{E}_3}{R_3} = \overline{I}_s \\ \overline{E}_1 - n\,\overline{E}_2 = 0 \\ \overline{I}_1 - \dfrac{1}{n}\overline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

- Sistema di 5 equazioni in 5 variabili (E_1, E_2, E_3, I_1, I_2). Alle prime 3 equazioni relative ai nodi si aggiungono le equazioni costitutive dei componenti non-controllati in tensione