

Esercizi di probabilità e statistica

Probabilità elementare - 1

Luca Palmieri

24 Marzo 2017

Esercizio 1. Un dado a sei facce viene lanciato n volte.

Indichiamo con $A_{i,j}$ l'evento in cui l' i -simo e il j -simo lancio del dado danno luogo allo stesso risultato.

Dimostrare che gli eventi della famiglia $\mathcal{F} = \{A_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ sono a due a due indipendenti.

Dimostrare inoltre che la famiglia \mathcal{F} **non** è una famiglia di eventi indipendenti.

Esercizio 2. Due dadi a sei facce vengono lanciati in contemporanea.

Dimostrare che l'evento "la somma dei due dadi è 7" è indipendente dal risultato del primo dado.

Esercizio 3. Si consideri una classe contenente m studenti, divisi tra ingegneri e matematici.

Si calcoli la probabilità che almeno due studenti festeggino il compleanno lo stesso giorno.

Si supponga che tutti gli anni abbiano 365 giorni e si assuma che la probabilità di festeggiare il compleanno il gg/mm sia pari a $\frac{1}{365}$ per ogni scelta di gg e mm .

Quanti studenti devono essere presenti in aula affinché la probabilità sia superiore ad $\frac{1}{2}$?

Esercizio 4. Siano $B_1, B_2, \dots \subset \Omega$ eventi disgiunti tali che

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \Omega$$

Sia $A \subseteq \Omega$ un altro evento tale che $\mathbb{P}(A|B_n) = p \in [0, 1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare che $\mathbb{P}(A) = p$.

Esercizio 5. Se 8 torri sono posizionate casualmente su una scacchiera qual è la probabilità che nessuna delle torri sia nelle condizioni di *mangiare*?

Detto in altri termini, per chi ha poco a cuore gli scacchi: qual è la probabilità che nessuna riga e nessuna colonna contengano più di una torre?

Esercizio 6. Una coppia di dadi viene lanciata ripetutamente fino a quando la somma dei dadi non è pari ad un *valore vincente*: 5 o 7.

Si calcoli la probabilità che il primo *valore vincente* sia 5 anziché 7.

Esercizio 7. Una donna ha a disposizione un mazzo composto da n chiavi. Solo una di queste chiavi apre la porta dell'H3.

La donna prende una chiave alla volta dal mazzo, in modo casuale, e prova ad aprire la serratura. Se la chiave non è quella giusta viene messa da parte.

Qual è la probabilità che la porta si apra al k -simo tentativo? ($k \in \{1, \dots, n\}$)

Qual è la probabilità che la porta si apra al k -simo se le chiavi sbagliate vengono rimesse nel mazzo, anziché essere scartate?

Esercizio 8. Due dadi a sei facce vengono lanciati contemporaneamente.

Qual è la probabilità che almeno uno dei due sia un 6 sapendo che i due dadi **non** mostrano la stessa faccia?

Esercizio 9. Uno studente di ingegneria al primo anno sta programmando la sessione d'esami invernale. Deve sostenere tre esami: Analisi I, Geometria e Fisica I.

Decide di procedere secondo la seguente strategia: sosterrà il primo appello di Analisi I. Se il voto di Analisi I è superiore a 18 andrà a sostenere il primo appello di Geometria. Se anche il voto di Geometria sarà superiore a 18 andrà a sostenere il secondo appello di Fisica I.

Se un esame va male allora non andrà a sostenere gli esami successivi.

Supponiamo che la probabilità di superare Analisi I sia pari a 0.9.

Supponiamo che la probabilità di superare Geometria, sapendo di aver superato Analisi I, è pari a 0.8.

Supponiamo, infine, che la probabilità di superare Fisica I, sapendo di aver superato Analisi I e Geometria, sia pari a 0.7.

Qual è la probabilità che lo studente riesca a superare tutti e tre gli esami?

Sapendo che lo studente **non** è riuscito a superare tutti e tre gli esami, qual è la probabilità che sia riuscito a superare Analisi I ma abbia fallito Geometria?

Esercizio 10. La probabilità che si verifichi una gravidanza extrauterina è doppia per le donne incinta fumatrici rispetto alle donne incinta non fumatrici.

Supponendo che il 32 per cento delle donne in età fertile siano fumatrici qual è la probabilità che è una donna sia fumatrice sapendo che sta portando avanti una gravidanza extrauterina?

Esercizio 11. Si consideri un mazzo da poker ben mischiato. Si estrae dal mazzo una carta alla volta e la si posa sul tavolo, a faccia scoperta, fino a quando non esce il primo asso.

Sapendo che il primo asso compare alle 20sima estrazione dal mazzo, qual è la probabilità condizionata che la carta seguente sia

- l'asso di picche?
- il 2 di quadri?

Esercizio 12. Siano date 10 monete, numerate.

L' i -sima moneta, se lanciata, dà *testa* con probabilità $\frac{i}{10}$, per ogni $i \in \{1, \dots, 10\}$.

Scegliamo una moneta a caso tra le 10 e la lanciamo: esce *testa*.

Qual è la probabilità, condizionata sulle informazioni a nostra disposizione, che la moneta scelta fosse la numero 5?