Esercizi di probabilità e statistica

Variabili Aleatorie Discrete - 1

Luca Palmieri

24 Marzo 2017

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria discreta e sia F la sua funzione di ripartizione, così definita:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & b \geq 3.5 \end{cases}$$

Determinare la densità discreta di X. (*terminologia*)

Esercizio 2. Un libro sul gioco d'azzardo consiglia la seguente strategia vincente per il gioco della roulette:

1. Scommetti 1 euro sul rosso;
2. Se esce il rosso (probabilità $\frac{18}{38}$) incassa 1 euro e smetti di giocare;
3. Se il rosso non esce (probabilità $\frac{20}{38}$) perdi 1 euro e continui a giocare, scommettendo 1 euro sul rosso per i successivi due giri di roulette. Dopo i due giri smetti di giocare, indipendentemente dal risultato.

Sia X la variabile aleatoria che descrive la somma vinta (o persa) quando si lascia il tavolo della roulette.

(i) Calcolare $\mathbb{P}(X > 0)$.

(ii) La strategia è davvero *vincente*?

(iii) Calcolare $E[X]$.

Esercizio 3. Due squadre si sfidano in una serie di giochi: vince la competizione la squadra che per prima totalizza i vittorie.
Si supponga che gli esiti dei vari giochi siano eventi indipendenti e che la squadra A vinca

ogni gioco con probabilità p. Non sono ammessi pareggi.
Si calcoli il *numero atteso* di giochi effettivamente giocati prima che una delle due squadre vinca la competizione quando

(i) $i = 2$;

(ii) $i = 3$.

Mostrare che in entrambi i casi il numero atteso è massimizzato, come funzione di p, quando $p = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Mr. White propone a Mr. Pink il seguente gioco: una moneta bilanciata viene lanciata ripetutamente, fino a quando esce la prima *croce*; se *croce* compare per la prima volta all'n-simo lancio Mr. Pink vince 2^n euro.
Sia X la variabile aleatori che descrive la vincita di Mr. Pink.
Dimostrare che $E[X] = +\infty$. Tuttavia...

(i) conviene a Mr. Pink pagare un milione di euro a Mr. White per fare una partita?

(ii) conviene a Mr. Pink pagare un milione di euro a Mr. White per ogni partita a patto di poter giocare tutte le partite che vuole e saldare i conti solo una volta smesso di giocare?

Esercizio 5. Ogni sera i diversi metereologi, confidando nelle conoscenze matematiche degli italiani, comunicano durante i telegiornali la probabilità che piova il giorno successivo.
Vogliamo stabilire qual è il miglior metereologo secondo lo schema che segue: se un metereologo sostiene che domani pioverà con probabilità p gli daremo un punteggio pari a

- $1 - (1 - p)^2$ se effettivamente piove;
- $1 - p^2$ se alla fine non piove.

Terremo nota dei punteggi per un certo periodo di tempo (un mese) e incoroneremo *miglior metereologo* chi otterrà il punteggio medio più alto.
Il colonnello Petrucci, uomo ingegnoso, è venuto a conoscenza del nostro schema e sta lavorando ad un sistema che gli permetta di massimizzare il suo *punteggio atteso*. Decide di procedere come segue: se è convinto che domani pioverà con probabilità p_1 annuncerà al telegiornale che pioverà con probabilità p_2.
Qual è p_2, in funzione di p_1, assumendo che il colonello Petrucci stia seguendo la strategia ottimale per massimizzare il proprio punteggio atteso?

Esercizio 6. Un edicolante compra un giornale locale a 10 centesimi e lo rivende a 15 centesimi. Non può restituire le copie invendute.
Se la domanda quotidiana del giornale in questione è descritta da una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 10$ e $p = \frac{1}{3}$ quanti giornali dovrebbe comprare l'edicolante per massimizzare il valore atteso del suo guadagno?

Esercizio 7. Sia X una variabile aleatoria tale che $E[X] = 1$ e $Var(X) = 5$. Si calcoli:

(i) $E[(2 + X)^2]$;

(ii) $Var(4+3X)$.

Esercizio 8. Si supponga che, in volo, i motori di un aereo possano andare in avaria con probabilità pari ad $1-p$.
Il verificarsi di un guasto in uno dei motori è un evento indipendente dal verificarsi o meno di un guasto negli altri motori.
Affinché l'aereo completi con successo il volo è necessario che la maggioranza dei suoi motori siano funzionanti. Per quali valori di p è preferibile un aereo con 5 motori rispetto ad un aereo con 3 motori?

Esercizio 9. Il numero di incidenti giornalieri lungo un particolare tratto della Salerno-Reggio Calabria è descritto con accuratezza da una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 3$.

(i) Si calcoli la probabilità che oggi si verifichino almeno 3 incidenti;

(ii) Ci è stato comunicato che si è appena verificato un incidente sul tratto in questione. Qual è la probabilità, alla luce dei fatti, che oggi si verifichino almeno 3 incidenti?

Esercizio 10. Sia X una variabile aleatoria binomiale. Si confrontino le probabilità esatte dei seguenti eventi con le rispettive probabilità calcolate approssimando X con una variabile aleatoria di Poisson di parametro opportuno:

(i) $\mathbb{P}(X=2)$ con $n=2$, $p=0.1$;

(ii) $\mathbb{P}(X=9)$ con $n=10$, $p=0.95$;

(iii) $\mathbb{P}(X=0)$ con $n=10$, $p=0.1$;

(iv) $\mathbb{P}(X=4)$ con $n=9$, $p=0.2$.

Esercizio 11. Una moneta bilanciata è lanciata ripetutamente: ci si ferma alla decima *testa*. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di *croci* uscite prima che ci fermassimo. Si calcoli la densità discreta di X.