Esercizi di probabilità e statistica

Variabili Aleatorie Discrete - 2

Luca Palmieri

31 Marzo 2017

Esercizio 1. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti e con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{3}$.

(i) Calcolare $E[X^2Y]$ e $Var[2X - Y]$;

(ii) Calcolare $\mathbb{P}(Y \geq X^2)$;

(iii) Determinare la densità discreta della variabile aleatoria $Z = 3X + Y$;

(iv) Calcolare $E[Z^2]$ e $Var[Z - 3Y]$.

Esercizio 2. Per stabilire la presenza di una certa malattia 100 persone vengono sottoposte ad un esame del sangue.
Tuttavia, anziché esaminare singolarmente ogni singola provette, si sceglie di dividere i 100 in 10 gruppi da 10 persone.
I campioni di sangue provenienti dagli individui di uno stesso gruppo saranno mischiati e la provetta risultante verrà esaminata per determinare la presenza o meno della malattia.
Se il test è negativo allora i 10 membri del gruppo vengono dichiarati sani.
Se il test è positivo, invece, ciascuno dei 10 membri del gruppo viene nuovamente sottoposto all'esame del sangue, stavolta singolarmente. In totale, quindi, un test positivo porta all'esecuzione di 11 esami.
Si assuma che la probabilità che una persona sia malata è pari a 0.1 e che ciascun individuo risulti sano o malato indipendentemente dallo stato di salute delle altre persone.
Si calcoli il numero atteso di test necessari per ogni gruppo. (*Stiamo tacitamente assumendo che il test non dia luogo a falsi positivi*)

Esercizio 3. Si decide che l'esame di "Probabilità e statistica" per l'anno accademico 2016/2017 consisterà in un test a crocette.
Vengono preparate 5 domande e per ogni domanda sono presenti 3 possibili risposte.
Qual è la probabilità che uno studente risponda correttamente ad almeno 4 domande mettendo le crocette a caso?
Qual è il punteggio atteso mettendo le crocette a caso? (*1 punto per ogni risposta corretta, 0 punti per ogni risposta errata o mancante*)

Esercizio 4. Si consideri un canale di trasmissione con le seguenti caratteristiche:

1. si possono trasmettere solo due tipologie di messaggi: "0" e "1";
2. a causa di limiti di natura tecnica ogni messaggio viene corrotto con probabilità 0.2, ossia denotando con M il messaggio inviato e con T il messaggio effettivamente trasmesso si ha
$$\mathbb{P}(T = 1 | M = 0) = \mathbb{P}(T = 0 | M = 1) = 0.2$$

Per aumentare l'accuratezza del canale di trasmissione si sceglie di adottare il seguente protocollo di comunicazione:

1. per trasmettere il messaggio $M = 0$ viene inviato $M_{inviato} = 00000$ (*5 volte consecutive "0"*) e, similmente, per trasmettere $M = 1$ si invia $M_{inviato} = 11111$;
2. il ricevente decodifica il contenuto del messaggio usando *un voto a maggioranza*, ossia denotando con T il messaggio effettivamente trasmesso e con R il messaggio decodificato si ha
$$\begin{aligned} T = 00010 \quad &\Rightarrow \quad R = 0 \\ T = 10101 \quad &\Rightarrow \quad R = 1 \\ T = 00011 \quad &\Rightarrow \quad R = 0 \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che $M \neq R$ usando questo protocollo di comunicazione?