Esercizi di probabilità e statistica

Catene di Markov - 1

Luca Palmieri

31 Marzo 2017

Esercizio 1. Aldo, Giovanni e Giacomo stanno giocando con una palla da basket.
Aldo passa la palla a Giovanni con probabilità 0.3 e a Giacomo con probabilità 0.7.
Giovanni passa la palla a Aldo con probabilità 0.6 e a Giacomo con probabilità 0.4.
Giacomo passa la palla con eguale probabilità a Aldo e Giovanni.
Tutti i passaggi sono indipendenti gli uni dagli altri.
Possiamo modellizzare il gioco come una catena di Markov?
In caso affermativo si introduca un opportuno spazio degli stati e si scriva la giusta matrice di transizione.

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov su $S = \{1, 2, 3\}$ con matrice di transizione

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcoli $\mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = j)$ per ogni $i,\ j \in \{1, 2, 3\}$.

Esercizio 3. Si supponga che la catena di Markov dell'esercizio precedente abbia la seguente distribuzione di probabilità iniziale:

$$p^{(0)} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

Si calcoli $p^{(2)}$, ossia la distribuzione di probabilità al secondo passo.

Esercizio 4. Si considerino le condizioni meteo per un certo numero di giorni come un processo stocastico con solo due possibili stati: 0/Sole e 1/Pioggia.
Assumiamo per semplicità che il processo in questione sia una catena di Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con matrice di transizione:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

1. Si calcoli la probabilità che un giorno di pioggia sia seguito da un giorno di sole.

2. Si calcoli la probabilità condizionata $\mathbb{P}(X_{62} = 1 \,|\, X_{61} = 0)$.
3. Si calcoli la probabilità che un giorno di pioggia sia seguito da due giorni di sole.
4. Si calcoli $\mathbb{P}(X_{62} = 1 \,|\, X_{60}) = 0$.
5. Se venerdì c'è il sole, qual è la probabilità che la domenica seguente sia un giorno di sole?

Esercizio 5. Una catena di Markov ha la seguente matrice di transizione:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Si determinino tutte le distribuzione stazionarie (*o misure di probabilità invarianti*) della catena.

Esercizio 6. Si consideri una catena di Markov X a due stati avente la seguente matrice di transizione:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

dove $\alpha,\ \beta \in [0,1]$.
Si determini $p_{1,1}^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Ricorda: $p_{1,1}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = 1 \,|X_0 = 1)$.

Esercizio 7. Un gruppo di biologi sta studiando una particolare specie di virus.
Esistono N ceppi diversi del virus in questione.
Dopo ogni replicazione c'è una probabilità α che il virus cambi ceppo, scegliendo con eguale probabilità uno qualsiasi degli $N-1$ ceppi rimanenti.
Qual è la probabilità che il ceppo originario (generazione 0) coincida con il ceppo a cui appartiene l'n-sima generazione?
Suggerimento: *l'Esercizio precedente può tornare utile.*

Esercizio 8. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov con matrice di transizione Π e distribuzione di probabilità iniziale λ.
Sia $k \in \mathbb{N}_+$. Definiamo $Y_n := X_{kn}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Si dimostri che $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov con matrice di transizione Π^k e distribuzione di probabilità iniziale λ.

Esercizio 9. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov su $S = \{1,2,3\}$ con matrice di transizione

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

con $p \in [0,1]$.
Si calcoli $\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_0 = 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ nei seguenti casi:

(i) $p = \frac{1}{16}$;

(ii) $p = \frac{1}{6}$;

(iii) $p = \frac{1}{12}$.

Esercizio 10. Si trovino le classi comunicanti associate alle seguente matrice stocastica:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quali classi sono chiuse?

Esercizio 11. Si costruisca un esempio di catena di Markov la cui matrice di transizione **non** presenti classi comunicanti chiuse.

Esercizio 12. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov su $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice di transizione

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quali sono le classi comunicanti della catena? Quali sono le classi chiuse? Ci sono stati assorbenti? Se sì, quali?